Aspects géométriques du Lemme Fondamental de Langlands-Shelstad

Gérard Laumon*

Abstract. In order to compute the Hasse–Weil zeta functions of the Shimura varieties or to establish some cases of the Langlands functoriality one first needs to stabilize the Arthur–Selberg trace formula. This stabilization can be done only if some combinatorial identities between orbital integrals over p-adic reductive groups are satisfied. The series of these conjectural identities form the so-called "Fundamental Lemma". We present here some key points of the geometric approaches which have been used by Goresky, Kottwitz and MacPherson on the one hand and Ngô Bao Châu and myself one the other hand, to prove some cases of the Fundamental Lemma.

Résumé. Pour calculer les fonctions zêta de Hasse-Weil des variétés de Shimura ou pour établir certains cas de la fonctorialité de Langlands, il faut dans un premier temps stabiliser la formule des traces d'Arthur-Selberg. Cette stabilisation n'est possible que si certaines identités combinatoires entre intégrales orbitales sur les groupes réductifs p-adiques sont vérifiées. Ces identités conjecturales ont été regroupées sous la terminologie générique de "Lemme Fondamental". Nous présentons ici quelques points clé des approches géométriques utilisées par Goresky, Kottwitz et MacPherson d'une part, et Ngô Bao Châu et moi-même d'autre part, pour démontrer certains cas du Lemme Fondamental.

Mathematics Subject Classification (2000). Primary 14H60, 11F72 ; Secondary 22E35.

Keywords. Fundamental Lemma, endoscopy, Langlands functoriality.

Mots-clés. Lemme Fondamental, endoscopie, fonctorialité de Langlands.

1. Introduction

Le programme de Langlands est un faisceau de relations entre les représentations automorphes des groupes réductifs sur un corps local ou global et les représentations galoisiennes de ce même corps local ou global. Ce programme est très vaste puisqu'il contient une bonne partie de la théorie des nombres et aussi de la géométrie algébrique du fait de ses relations avec la théorie des motifs de Grothendieck, et il est donc très loin d'être achevé.

Nous nous intéressons ici à un aspect technique de ce programme. Pour calculer les fonctions zêta de Hasse-Weil des variétés de Shimura ou pour établir certains cas

*UMR 8628 du CNRS

Proceedings of the International Congress
of Mathematicians, Madrid, Spain, 2006

de la fonctorialité de Langlands, il faut dans un premier temps stabiliser la formule des traces d'Arthur-Selberg (cf. [19], [12], [13] et [3]). Cette stabilisation n'est possible que si certaines identités combinatoires entre intégrales orbitales sur les groupes réductifs p-adiques sont vérifiées. Ces identités conjecturales ont été regroupées sous la terminologie générique et un peu baroque de "Lemme Fondamental".

Le Lemme Fondamental a été découvert par Labesse et Langlands dans leur travail sur la stabilisation de la formule des traces de Selberg pour $\mathrm{SL}(2)$ (cf. [18]). Langlands et Shelstad en ont donné une formulation générale toujours conjecturale dans [20]. Waldspurger en a ensuite formulé une variante pour les algèbres de Lie (cf. [28] et [16]) et Kottwitz et Shelstad ont donné une conjecture précise dans le cas "tordu" (cf. [17]). Pour être complet, signalons aussi les variantes "pondérée" et "pondérée tordue" du Lemme Fondamental conjecturées par Arthur (cf. [3]).

Dans certain cas il est possible de prouver le Lemme Fondamental en n'utilisant que des techniques combinatoires ou d'analyse harmonique. Cependant le cas général semble hors d'atteinte de cette manière et un recours à des techniques de la géométrie algébrique est probablement nécessaire.

Dans cet exposé nous présentons quelques points clé des approches géométriques utilisées par Goresky, Kottwitz et MacPherson d'une part, et Ngô Bao Châu et moi-même d'autre part, pour démontrer certains cas du Lemme Fondamental. Nous renvoyons aux articles originaux ([7] et [22]), à l'exposé de Ngô dans ce volume (cf. [23]) et à l'exposé Bourbaki de Dat (cf. [5]) pour plus de détails

2. Groupes réductifs

Soit F un corps local non archimédien, i.e. une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ ou $\mathbb{F}_p((t))$. On note $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F (la clôture intégrale de $\mathbb{Z}_p$ ou $\mathbb{F}_p[[t]]$ dans F) et $\mathfrak{p}_F$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_F$. Soit $\overline{F}$ une clôture algébrique de F.

Soit G un groupe (algébrique) réductif connexe sur F. On suppose que G est *quasi-déployé*, c'est-à-dire que G admet un sous-groupe de Borel défini sur F et qu'il se déploie au-dessus d'une extension finie non ramifiée $F' \subset \overline{F}$ de F. Notre groupe G est donc *non ramifié* et il existe des schémas en groupes lisses $\mathcal{G}$ sur le trait $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)$ dont la fibre générique est G et la fibre spéciale est un groupe réductif connexe sur le corps résiduel $\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}_F$ de F. Soient $\mathcal{G}$ un tel schéma en groupes et $K = \mathcal{G}(\mathcal{O}_F) \subset G(F)$ le sous-groupe compact maximal *hyperspécial* correspondant.

Exemple 2.1. On suppose que la caractéristique résiduelle p de F est > 2. Soit F' l'extension quadratique non ramifiée de F contenue dans $\overline{F}$. On note τ l'élément non trivial du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F'/F)$.

On rappelle que le groupe $F^\times/\mathrm{Nr}_{F'/F}(F'^\times)$ est le groupe à deux éléments engendré par la classe de n'importe quelle uniformisante $\varpi_F \in \mathfrak{p}_F$ de F. On l'identifie à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans la suite.

Un F'-espace hermitien est un espace vectoriel V de dimension finie sur F' muni d'une forme τ-sesquilinéaire symétrique non dégénérée Φ. Un tel F'-espace vectoriel hermitien (V, Φ) admet un discriminant : la classe dans $F^\times/\mathrm{Nr}_{F'/F}(F'^\times)$ du déterminant de la matrice de Φ dans une base de V. Deux F'-espaces hermitiens de même dimension sont isomorphes si et seulement s'ils ont même discriminant.

Le groupe unitaire des automorphismes

$$\mathrm{U}(V, \Phi) \subset \mathrm{Res}_{F'/F}\mathrm{Aut}_{F'}(V).$$

d'un tel F'-espace hermitien (V, Φ) est un groupe réductif connexe sur F. Il se déploie sur F' et est en fait une forme (extérieure) de $\mathrm{Aut}_{F'}(V)$ sur F. Il est quasi-déployé, et donc non ramifié, si et seulement si le discriminant de (V, Φ) est trivial. Dans ce cas, il existe des $\mathcal{O}_{F'}$-réseaux $M \subset V$ qui sont auto-duaux pour Φ au sens où le $\mathcal{O}_{F'}$-réseau

$$M^\perp = \{v \in V \mid \Phi(v, M) \subset \mathcal{O}_{F'}\} \subset V$$

est égal à M ; les sous-groupes maximaux hyperspéciaux sont alors les stabilisateurs dans $\mathrm{U}(V, \Phi)(F)$ de ces réseaux.

Soient (V, Φ) un F'-espace hermitien (V, Φ) de dimension n dont le discriminant est trivial et M un $\mathcal{O}_{F'}$-réseau auto-dual de V. On peut trouver une base de M sur $\mathcal{O}_{F'}$, qui est aussi une base de V sur F', dans laquelle la matrice de Φ est égale à la matrice Φ_n qui n'a pour seules entrées non nulles que les $(\Phi_n)_{i,n+1-i} = 1$ pour $i = 1, \ldots, n$. Tout couple formé d'un groupe unitaire non ramifié et d'une sous-groupe compact maximal hyperspécial est donc isomorphe à un groupe unitaire standard

$$\mathrm{U}(n) = \{g \in \mathrm{GL}_{F'}(n) \mid {}^{\mathrm{t}}g^\tau \Phi_n g = \Phi_n\}$$

avec son sous-groupe compact maximal hyperspécial standard

$$\mathrm{U}(n)(F) \cap \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_{F'}).$$

Le groupe réductif $\mathrm{U}(n)$ ainsi défini admet pour groupe de Borel sur F le sous-groupe formé des $g \in \mathrm{U}(n)$ qui sont des matrices triangulaires supérieures dans $\mathrm{GL}_{F'}(n)$.

3. Intégrales orbitales

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G qui est en particulier un espace vectoriel de dimension finie sur F. Notons $\mathrm{ad}\colon G \to \mathrm{Aut}_F(\mathfrak{g})$ la représentation adjointe de G. La classe de conjugaison d'un élément γ de $\mathfrak{g}$ est l'ensemble des $\mathrm{ad}(g)(\gamma)$ pour g parcourant $G(F)$; le centralisateur de γ est le sous-schéma en groupes $Z_G(\gamma)$ de G défini par la condition $\mathrm{ad}(g)(\gamma) = \gamma$. On rappelle que le centralisateur d'un élément régulier semi-simple de $\mathfrak{g}$ est toujours connexe.

Soit T un tore maximal de G que l'on suppose *anisotrope*, c'est-à-dire ne contenant pas de sous-tore déployé sur F non trivial, de sorte que le groupe $T(F)$ est compact. Soit $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de T.

Pour tout élément γ de $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ qui est régulier, c'est-à-dire dont le centralisateur dans G est égal à T, toute fonction $f : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ localement constante et à support compact et toute mesure de Haar $\mathrm{d}g$ sur $G(F)$, on peut former l'*intégrale orbitale* en γ de f

$$\mathrm{O}_\gamma^G(f, \mathrm{d}g) = \int_{G(F)} f(\mathrm{ad}(g^{-1})(\gamma))\,\mathrm{d}g.$$

On vérifie que l'ensemble

$$\{g \in G(F) \mid \mathrm{ad}(g^{-1})(\gamma) \in \mathrm{Supp}(f)\}$$

est compact et donc que cette intégrale orbitale converge (c'est essentiellement une somme finie).

En particulier, si K est un sous-groupe compact maximal hyperspécial de $G(F)$, si on normalise $\mathrm{d}g$ par $\mathrm{vol}(K, \mathrm{d}g) = 1$ et si $f = 1_{\mathfrak{k}}$ est la fonction caractéristique du $\mathcal{O}_F$-réseau $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ algèbre de Lie de K, on a l'intégrale orbitale $\mathrm{O}_\gamma^G(1_{\mathfrak{k}}, \mathrm{d}g)$. Comme tous les sous-groupes compacts maximaux hyperspéciaux sont conjugués dans $G(F)$, cette intégrale orbitale ne dépend pas du choix de K et on la note simplement O_γ^G dans la suite.

Exemple 3.1 (Suite de 2.1). Soient $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie d'extensions finies séparables de F que l'on suppose toutes totalement ramifiées pour simplifier l'exposition. On note n_i le degré de E_i sur F, E_i' l'extension composée $E_i' = E_i F'$ de F' et encore τ l'élément non trivial du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(E_i'/E_i) \cong \mathrm{Gal}(F'/F)$.

Pour chaque $i \in I$ et chaque $c_i \in E_i^\times$, on considère le F'-espace hermitien (E_i', Φ_{i,c_i}) où

$$\Phi_{i,c_i}(x, y) = \mathrm{Tr}_{E_i'/F'}(c_i x^\tau y).$$

On note $\mu_i(c_i) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ son discriminant ; si n_i est premier à p, on a simplement

$$\mu_i(c_i) \equiv v_{E_i}(c_i) + n_i - 1 \pmod 2.$$

Pour chaque $c_I = (c_i)_{i\in I} \in E_I^\times$, on considère le F'-espace hermitien

$$(E_I', \Phi_{I,c_I}) = \bigoplus_{i\in I}(E_i', \Phi_{i,c_i}).$$

Son discriminant est la somme

$$\sum_{i\in I} \mu_i(c_i) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

des discriminants des Φ_{i,c_i}. On note

$$G_{I,c_I} \subset \mathrm{Res}_{F'/F}\mathrm{Aut}_{F'}(E_I')$$

le F-groupe réductif des automorphismes du F'-espace hermitien (E_I', Φ_{I,c_I}).

Pour chaque $i \in I$ on note T_i le noyau de l'homomorphisme de tores

$$\mathrm{Res}_{E_i'/F}\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathrm{Res}_{E_i/F}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$$

qui envoie x sur $x^\tau x$. Le tore $T_I = \prod_{i\in I} T_i$ est anisotrope sur F. Comme le tore $\prod_{i\in I} \mathrm{Res}_{E_i'/F'}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ est de manière naturelle un tore maximal dans $\mathrm{Aut}_{F'}(E_I')$, T_I est naturellement plongé dans $\mathrm{Res}_{F'/F}\mathrm{Aut}_{F'}(E_I')$ et on a en fait

$$T_I \subset G_{I,c_I} \subset \mathrm{Res}_{F'/F}\mathrm{Aut}_{F'}(E_I')$$

pour chaque $c_I \in E_I^\times$.

Pour chaque $i \in I$, soit $\gamma_i \in \mathcal{O}_{E_i'} \subset E_i'$ qui engendre E_i' sur F' et qui vérifie

$$\gamma_i^\tau + \gamma_i = 0,$$

de sorte que $\gamma_I = (\gamma_i)_{i\in I}$ est un élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}_I = \bigoplus_{i\in I}\{x_i \in E_i' \mid x_i^\tau + x_i = 0\}$ de T_I. Pour chaque $c_I \in E_I^\times$, γ_I est un élément semi-simple de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{I,c_I}$ de G_{I,c_I} de centralisateur T_I.

Supposons de plus que pour tous $i \neq j$ dans I les polynômes minimaux $P_i(x)$ et $P_j(x)$ sur F' de γ_i et γ_j sont premiers entres eux. Alors cette classe de conjugaison semi-simple est régulière et l'intégrale orbitale $\mathrm{O}_{\gamma_I}^{G_{I,c_I}}$ admet l'interprétation concrète suivante : c'est le nombre des $\mathcal{O}_{F'}$-réseaux $M \subset E_I'$ vérifiant les deux conditions suivantes :

– $M^{\perp_{c_I}} = M$, où $M^{\perp_{c_I}} = \{x \in E_I' \mid \Phi_{I,c_I}(x, M) \subset \mathcal{O}_{F'}\}$,
– $\gamma_I M \subset M$.

4. κ-Intégrales orbitales

La classe de *conjugaison stable* d'un élément régulier $\gamma \in \mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$, est l'ensemble des $\gamma' \in \mathfrak{g}$ qui sont conjugués à γ dans $\overline{F} \otimes_F \mathfrak{g}$ par un élément de $G(\overline{F})$. Tout $\gamma' = \mathrm{ad}(g^{-1})(\gamma)$ stablement conjugué à γ définit un 1-cocycle

$$\sigma \mapsto g^{-1}\sigma(g),\ \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to T(\overline{F}),$$

dont la classe dans $H^1(F, T) := H^1(\mathrm{Gal}(\overline{F}/F), T(\overline{F}))$ ne dépend que de la classe de $G(F)$-conjugaison de γ'. Par construction l'image de cette classe dans l'ensemble pointé $H^1(F, G) := H^1(\mathrm{Gal}(\overline{F}/F), G(\overline{F}))$ est triviale. On construit ainsi une bijection de l'ensemble des classes de $G(F)$-conjugaison dans la classe de conjugaison stable de γ (ensemble pointé par la classe de conjugaison de γ) sur le groupe fini $\mathrm{Ker}(H^1(F, T) \to H^1(F, G))$.

Le centralisateur d'un élément $\gamma' = \mathrm{ad}(g)(\gamma) \in \mathfrak{g}$ stablement conjugué à γ est le tore maximal $T' = gTg^{-1} \subset G$ stablement conjugué à T ; il est donc canoniquement isomorphe à T par l'isomorphisme $T \to T' = gTg^{-1}$ qui envoie t sur gtg^{-1}, isomorphisme qui est en fait défini sur F. Pour tout caractère $\kappa\colon \mathrm{Ker}(H^1(F,T)\to H^1(F,G))\to\mathbb{C}^\times$ vu comme une fonction sur la classe de conjugaison stable de γ, on peut former la *κ-intégrale orbitale* en γ d'une fonction $f\colon \mathfrak{g}\to\mathbb{C}$ localement constante à support compact

$$\mathrm{O}_\gamma^{G,\kappa}(f,\mathrm{d}g)=\sum_{\gamma'}\kappa(\gamma')\mathrm{O}_{\gamma'}^G(f,\mathrm{d}g)$$

où γ' parcourt un système de représentants des classes de conjugaison dans la classe de conjugaison stable de γ. Pour le caractère trivial $\kappa=1$ on note

$$\mathrm{SO}_{[\gamma]}^G(f,\mathrm{d}g)=\mathrm{O}_\gamma^{G,1}(f,\mathrm{d}g)$$

où $[\gamma]$ est la classe de conjugaison stable de γ, et on dit *intégrale orbitale stable* au lieu de 1-*intégrale orbitale*.

Pour $f=1_{\mathfrak{k}}$ et $\mathrm{vol}(K,\mathrm{d}g)=1$ où K est un sous-groupe compact maximal hyperspécial de $G(F)$, on note simplement $\mathrm{O}_\gamma^{G,\kappa}$ la κ-intégrale orbitale et $\mathrm{SO}_{[\gamma]}^G$ l'intégrale orbitale stable ; elles ne dépendent pas du choix de K.

Exemple 4.1 (Suite de 3.1). Pour tout $i\in I$ posons

$$c_i^0=\frac{\varepsilon^{n-1}}{\frac{\mathrm{d}P_i(x)}{\mathrm{d}x}(\gamma_i)P_{I-\{i\}}(\gamma_i)}\in E_i^\times$$

où $\varepsilon\in\mathcal{O}_{F'}^\times$ est n'importe quel élément vérifiant $\varepsilon^\tau=-\varepsilon$ et où $P_J(x)=\prod_{j\in J}P_j(x)$ quel que soit $J\subset I$. On a

$$\mu_i(c_i^0)\equiv\sum_{j\in I-\{i\}}r_{ji}\ (\mathrm{mod}\ 2)$$

où r_{ji} est la valuation du résultant des deux polynômes $P_i(x)$ et $P_j(x)$ à coefficients dans F'. Le discriminant de Φ_{I,c_I^0} est trivial et le $\mathcal{O}_{F'}$-réseau $\mathcal{O}_{F'}[\gamma]\subset E_I'$ est autodual pour Φ_{I,c_I^0}. On note simplement G_I le groupe unitaire G_{I,c_I^0}, $\mathfrak{g}_I$ son algèbre de Lie et K_I le sous-groupe maximal hyperspécial de G_I qui fixe le $\mathcal{O}_{F'}$-réseau auto-dual $\mathcal{O}_{F'}[\gamma_I]$. On peut si l'on le souhaite identifier (G_I,K_I) à $(\mathrm{U}(n),\mathrm{U}(n,F)\cap\mathrm{GL}(n,\mathcal{O}_{F'}))$ comme dans la section 2.

Pour chaque $i\in I$ fixons une uniformisante ϖ_{E_i} de E_i et donc aussi de E_i'. Notons Λ_I le noyau de l'application somme des coordonnées $\mathbb{Z}^I\to\mathbb{Z}$ et pour chaque $\lambda\in\Lambda_I$ posons $\varpi_{E_I}^{-\lambda}=(\varpi_{E_i}^{-\lambda_i})_{i\in I}$ et $c_I^\lambda=\varpi_{E_I}^{-\lambda}c_I^0$.

On a l'élément γ_I dans $\mathfrak{t}_I\subset\mathfrak{g}_I$. Pour chaque $\lambda\in\Lambda_I$, le discriminant de la forme hermitienne Φ_{I,c_I^λ} est trivial et il existe donc $x^\lambda\in\mathrm{Aut}_{F'}(E_I')(F')$ tel que $x^\lambda G_{I,c_I^\lambda}(x^\lambda)^{-1}=G_I$. On choisit un tel x^λ et on note γ_I^λ l'élément $\mathrm{ad}(x^\lambda)(\gamma_I)$ de $\mathfrak{g}_I$; la classe de conjugaison dans $\mathfrak{g}_I$ de γ_I^λ ne dépend pas du choix de x^λ (pour $\lambda=0$ on peut bien sûr prendre $x^\lambda=1$).

Pour tous $\lambda, \lambda' \in \Lambda_I$, les éléments γ_I^{λ} et $\gamma_I^{\lambda'}$ sont automatiquement stablement conjugués dans $\mathfrak{g}_I$. Ils sont de plus conjugués dans $\mathfrak{g}_I$ si et seulement si $\lambda \equiv \lambda' \pmod{2\Lambda_I}$.

On a donc un classe de conjugaison stable $[\gamma_I]$ bien définie dans $\mathfrak{g}_I$ et une indexation des classes de conjugaison dans cette classe de conjugaison stable par $\Lambda_I/2\Lambda_I$.

On considère l'ensemble $\mathcal{X}_{\gamma_I}$ des $\mathcal{O}_{F'}$-réseaux $M \subset E_I'$ tels qu'il existe $\lambda \in \Lambda_I$ avec

$$M^{\perp_{c_I^{\lambda}}} = M$$

ou ce qui revient au même

$$M^{\perp_{c_I^0}} = \varpi_{E_I}^{-\lambda} M.$$

Le groupe discret Λ_I agit sur cet ensemble par

$$\lambda \cdot M = \varpi_{E_I}^{-\lambda} M$$

et on a une application

$$\mu_{\gamma_I} \colon \mathcal{X}_{\gamma_I}/\Lambda_I \to \Lambda_I/2\Lambda_I$$

qui envoie l'orbite $\Lambda_I \cdot M$ sur la classe de tout λ tel que $M^{\perp_{c_I^0}} = \varpi_{E_I}^{-\lambda} M$.

Alors, pour tout caractère κ de $\Lambda_I/2\Lambda_I$ la κ-intégrale orbitale $\mathrm{O}_{\gamma_I}^{G_I,\kappa}$ est en fait la somme

$$\sum_{\mu \in \Lambda_I/2\Lambda_I} \kappa(\mu) |\{M \in \mathcal{X}_{\gamma_I} \mid \mu_{\gamma_I}(M) = \mu\}|$$

et en particulier

$$\mathrm{SO}_{\gamma_I}^{G_I} = |\mathcal{X}_{\gamma_I}/\Lambda_I|.$$

5. Dualité de Langlands

Rappelons qu'à tout couple formé d'un groupe réductif connexe G sur un corps séparablement clos k et d'un tore maximal T de G, est associé la *donnée radicielle*

$$(X^*, R, X_*, R^\vee) = (X^*(T), R(G,T), X_*(T), R^\vee(G,T))$$

où X^* (resp. X_*) est le groupe abélien libre de rang fini des caractères (resp. co-caractères) de T et où $R \subset X^*$ (resp. $R^\vee \subset X_*$) est l'ensemble fini des racines (resp. co-racines) de T dans G.

Rappelons aussi que toute donnée radicielle $(X^*, R, X_*, R^\vee)$ formée de deux groupes abéliens libres de rangs finis en dualité et de sous-ensembles finis $R \subset X^*$ et $R^\vee \subset X_*$ vérifiant les axiomes des systèmes de racines et de co-racines, provient d'un couple (G,T) et que le couple (G,T) est uniquement déterminé par sa donnée radicielle à isomorphisme non unique près. Plus précisément, l'homomorphisme du groupe $\mathrm{Aut}(G,T)$ des automorphismes algébriques du couple (G,T) dans celui

$\mathrm{Aut}(X^*, R, X_*, R^\vee)$ des automorphismes de la donnée radicielle induit un isomorphisme

$$\mathrm{Aut}(G, T)/\mathrm{Int}(T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(X^*, R, X_*, R^\vee)$$

où $\mathrm{Int}\colon G \to \mathrm{Aut}(G)$ est l'homomorphisme de groupes qui associe à un élément de G l'automorphisme intérieur correspondant. L'application $\mathrm{Int}\colon N_G(T) \to \mathrm{Aut}(G, T)$ induit un monomorphisme du groupe de Weyl $W = W(G, T) = N_G(T)/T$ dans $\mathrm{Aut}(G, T)/\mathrm{Int}(T)$ que l'on note encore Int et dont le conoyau est fini.

Partant d'un couple (G, T) sur k comme ci-dessus, il existe donc un couple $(\widehat{G}, \widehat{T})$ formé d'un groupe réductif connexe $\widehat{G}$ sur $\mathbb{C}$ et d'un tore maximal de $\widehat{T}$ de $\widehat{G}$, dont la donnée radicielle est duale de celle de (G, T) au sens où

$$(X^*(\widehat{T}), R(\widehat{G}, \widehat{T}), X_*(\widehat{T}), R^\vee(\widehat{G}, \widehat{T})) = (X_*(T), R^\vee(G, T), X^*(T), R(G, T)).$$

Ce couple est dit le *dual de Langlands complexe* de (G, T).

Par exemple, on a les groupes duaux suivants (les tores maximaux étant des deux côtés les tores des matrices diagonales)

G	$\widehat{G}$
$\mathrm{GL}(n)$	$\mathrm{GL}(n)$
$\mathrm{PGL}(n)$	$\mathrm{SL}(n)$
$\mathrm{Sp}(2n)$	$\mathrm{SO}(2n+1)$
$\mathrm{SO}(2n)$	$\mathrm{SO}(2n)$

Si G est semi-simple et adjoint, $\widehat{G}$ est semi-simple et simplement connexe, et vice-versa. Plus généralement, si le centre de G est connexe alors le groupe dérivé de $\widehat{G}$ est simplement connexe, et vice-versa.

Si maintenant k est un corps non nécessairement séparablement clos, soit $\bar{k}$ une clôture séparable de k. Pour un groupe réductif connexe G sur k muni d'un tore maximal T sur k, on a comme précédemment la donnée radicielle

$$(X^*, R, X_*, R^\vee) = (X^*(\bar{k}\otimes_k T), R(\bar{k}\otimes_k G, \bar{k}\otimes_k T), X_*(\bar{k}\otimes_k T), R^\vee(\bar{k}\otimes_k G, \bar{k}\otimes_k T)).$$

De plus on a une action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ sur cette donnée radicielle et donc une action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ sur la donnée radicielle duale $(X_*, R^\vee, X^*, R)$, d'où un homomorphisme de groupes

$$\rho\colon \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to \mathrm{Aut}(\widehat{G}, \widehat{T})/\mathrm{Int}(\widehat{T}).$$

Pour tout w dans le groupe de Weyl $W = W(\bar{k} \otimes_k G, \bar{k} \otimes_k T) = W(\widehat{G}, \widehat{T})$ on peut tordre ρ par w en posant

$${}^w\rho(\sigma) = \mathrm{Int}(w)\rho(\sigma)\mathrm{Int}(w^{-1})$$

quel que soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Dire que G est quasi-déployé sur k revient à dire :

($*$) *il existe $w \in W$ tel que ${}^w\rho$ fixe une base Δ du système de racines R ou ce qui revient au même d'une base $\Delta^\vee$ du système de co-racines $R^\vee$.*

La donnée de $(\widehat{G}, \widehat{T})$ munie de l'homomorphisme ρ ci-dessus ne permet pas de retrouver le couple (G, T). Par contre, on a une bijection entre les classes d'isomorphie de couples $(G, [T])$ formés d'un groupe réductif connexe quasi-déployé sur k et d'une classe de conjugaison stable de tores maximaux de G et l'ensemble des classes d'isomorphie de triplets $(\widehat{G}, \widehat{T}, \rho)$ formés d'une groupe réductif connexe sur $\mathbb{C}$, d'un tore maximal $\widehat{T}$ et d'un homomorphisme $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to \mathrm{Aut}(\widehat{G}, \widehat{T})/\mathrm{Int}(\widehat{T})$ vérifiant $(*)$.

Exemple 5.1 (Suite de 4.1). Pour $G = \mathrm{Res}_{E'_I/F'}\mathbb{G}_\mathrm{m}$ et $T = \mathrm{Res}_{E'_I/F'}\mathbb{G}_\mathrm{m}$, on a $\widehat{G} = \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^{\mathrm{Hom}_{F'}(E'_I,\overline{F})})$, $\widehat{T} = (\mathbb{C}^\times)^{\mathrm{Hom}_{F'}(E'_I,\overline{F})}$ et l'homomorphisme $\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{F}/F') \to \mathrm{Aut}(\widehat{G}, \widehat{T})/\mathrm{Int}(\widehat{T})$ envoie σ sur l'élément du groupe de Weyl

$$W(\widehat{G}, \widehat{T}) = \mathrm{Int}(\widehat{G}, \widehat{T})/\mathrm{Int}(\widehat{T}) \subset \mathrm{Aut}(\widehat{G}, \widehat{T})/\mathrm{Int}(\widehat{T})$$

défini par la permutation de $\mathrm{Hom}_{F'}(E'_I, \overline{F})$ induite par l'action de σ sur $\overline{F}$.

Dans ce cas $\mathrm{Aut}(\widehat{G}, \widehat{T})/\mathrm{Int}(\widehat{T})$ est le produit semi-direct de $W(\widehat{G}, \widehat{T})$ par l'automorphisme extérieur de $\widehat{G}$ donné par $g \to {}^{\mathrm{t}}g^{-1}$ où la transposition est relative à la base canonique de $\mathbb{C}^{\mathrm{Hom}_{F'}(E'_I,\overline{F})}$.

Pour $G = G_I$ et $T = T_I$, on a $\widehat{G} = \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^{\mathrm{Hom}_F(E_I,\overline{F})})$, $\widehat{T} = (\mathbb{C}^\times)^{\mathrm{Hom}_F(E_I,\overline{F})}$ et l'homomorphisme $\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{Aut}(\widehat{G}, \widehat{T})/\mathrm{Int}(\widehat{T})$ envoie $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F') \subset \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ sur l'élément du groupe de Weyl $W(\widehat{G}, \widehat{T})$ défini par la permutation de $\mathrm{Hom}_F(E_I, \overline{F}) = \mathrm{Hom}_{F'}(E'_I, \overline{F})$ induite par l'action de σ sur $\overline{F}$, et il envoie $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) - \mathrm{Gal}(\overline{F}/F')$ sur le produit de ce même élément du groupe de Weyl et de l'automorphisme extérieur ci-dessus.

Pour le groupe unitaire quasi-déployé $G = \mathrm{U}(n)$ et T le tore maximal le plus déployé formé des matrices unitaires diagonales, on a $\widehat{G} = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\widehat{T}$ est le tore des matrices diagonales de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ et l'homomorphisme $\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{Aut}(\widehat{G}, \widehat{T})/\mathrm{Int}(\widehat{T})$ se factorise par $\mathrm{Gal}(F'/F)$ et envoie l'élément non trivial τ sur l'automorphisme extérieur $g \mapsto \Phi_n {}^{\mathrm{t}}g^{-1}\Phi_n$.

6. Groupes endoscopiques

Soit G un groupe réductif connexe quasi-déployé sur le corps local non archimédien F muni d'un tore maximal T.

Soit $(\widehat{G}, \widehat{T})$ le groupe dual de $(\overline{F} \otimes_F G, \overline{F} \otimes_F T)$ muni de l'homomorphisme $\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{Aut}(\widehat{G}, \widehat{T})/\mathrm{Int}(\widehat{T})$.

La dualité de Tate-Nakayama identifie ce groupe fini $\pi_0(\widehat{T}^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)})$ au dual de Pontryagin de $H^1(F, T)$. Plus généralement la dualité de Tate-Nakayama étendue par Kottwitz identifie $H^1(F, G)$ au groupe fini $\pi_0(Z(\widehat{G})^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)})$ où on a noté $Z(\widehat{G})$ le centre de $\widehat{G}$. Par suite, le dual du noyau $\mathrm{Ker}(H^1(F, T) \to H^1(F, G))$ est le quotient $\pi_0(\widehat{T}^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)})/\pi_0(Z(\widehat{G})^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)})$.

Pour simplifier l'exposition on suppose dans la suite que T est anisotrope de sorte que $\widehat{T}^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)}$ est fini, tout comme $Z(\widehat{G})^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)} \subset \widehat{T}^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)}$.

Si $s \in \widehat{T}^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)}$, la composante neutre $\widehat{H}$ de son centralisateur dans $\widehat{G}$ est un groupe réductif connexe qui contient le tore maximal $\widehat{T}$. La donnée radicielle de $(\widehat{H}, \widehat{T})$, qui est contenue dans celle de $(\widehat{G}, \widehat{T})$, est stable sous l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. L'homomorphisme $\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{Aut}(\widehat{G}, \widehat{T})/\mathrm{Int}(\widehat{T})$ a son image contenue dans $\mathrm{Aut}(\widehat{G}, \widehat{H}, \widehat{T})/\mathrm{Int}(\widehat{T})$ et induit donc un homomorphisme

$$\rho_H\colon \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{Aut}(\widehat{H}, \widehat{T})/\mathrm{Int}(\widehat{T}).$$

Par suite il existe un couple (unique à isomorphisme près) formé d'un groupe réductif connexe quasi-déployé H sur F et d'une classe de conjugaison stable $[T]$ de tores maximaux de H, de dual $(\widehat{H}, \widehat{T})$ avec l'homomorphisme ρ_H. Un tel couple est dit *endoscopique* pour (G, T). Tout tore S dans $[T]$ est muni d'un isomorphisme naturel avec T (ce qui justifie notre notation) et est donc anisotrope.

Exemple 6.1 (Suite de 5.1). Pour $G = G_I$ et $T = T_I$ on a T_I anisotrope et $\widehat{T}^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)} = \{\pm 1\}^I \subset (\mathbb{C}^\times)^I \subset \prod_{i\in I} (\mathbb{C}^\times)^{\mathrm{Hom}_F(E_i, \overline{F})} = \widehat{T}$. Tout $s = (s_i)_{i\in I} \in \widehat{T}^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)}$ définit une partition $I = I_1 \amalg I_2$ où I_1 (resp. I_2) est l'ensemble des $i \in I$ tel que $s_i = 1$ (resp. $s_i = -1$). Le groupe endoscopique défini par s est le produit de groupes unitaires $G_{I_1} \times_F G_{I_2}$, muni de la classe de conjugaison stable de tores maximaux $[T_{I_1} \times_F T_{I_2}]$.

7. Lemme Fondamental

Conjecture 7.1 (Langlands-Shelstad [20]). Soient G un groupe réductif non ramifié sur F, T un tore maximal anisotrope de G, $\gamma \in \mathfrak{t}$ un élément régulier semi-simple dans $\mathfrak{g}$ comme dans la section 3, et $s \in \widehat{T}^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)}$ définissant un caractère κ de $\mathrm{Ker}(H^1(F, T) \to H^1(F, G))$ par la dualité de Tate-Nakayama comme dans la section précédente. On a la κ-intégrale orbitale $\mathrm{O}_\gamma^{G,\kappa}$, le groupe endoscopique H muni de sa classe de conjugaison stable de tore maximaux $[T]$ défini par s et l'*intégrale orbitale stable* $\mathrm{SO}_{[\gamma]}^H$.

Alors

$$\mathrm{O}_\gamma^{G,\kappa} = \varepsilon(\gamma)\mathrm{D}_H^G(\gamma)\mathrm{SO}_{[\gamma]}^H.$$

où $\varepsilon(\gamma)$ est une racine de l'unité qui est définie précisément dans [20] et où le discriminant $\mathrm{D}_H^G(\gamma)$ est défini par

$$\mathrm{D}_H^G(\gamma) = \prod_{\alpha\in R(G,T)-R(H,T)} |\alpha(\gamma)|_F^{1/2}.$$

On a noté $|a|_{\overline{F}} = q^{-v_F(a)}$ pour tout $a \in \overline{F}^\times$ où q est de nombre des élément du corps résiduel de F et $v_F\colon \overline{F}^\times \to \mathbb{Q}$ est la valuation normalisée par $v_F(\varpi_F) = 1$ pour toute uniformisante ϖ_F de F.

Remarque 7.2. (i) La racine de l'unité $\varepsilon(\gamma)$ a été calculée par Waldspurger pour les groupes classiques dans [29].

(ii) Kottwitz a montré comment pointer la classe de conjugaison stable de γ dans G à l'aide de la section de Kostant pour simplifier la définition de Langlands-Shelstad de $\varepsilon(\gamma)$ (cf. [15]).

(iii) D'après Waldspurger (cf. [30]), il suffit de démontrer le Lemme Fondamental pour F d'égales caractéristiques, c'est-à-dire $F = \mathbb{F}_q((t))$ pour un corps fini $\mathbb{F}_q$.

8. Résultats

Outre le cas particulier de SL(2) qui est à l'origine du Lemme Fondamental (cf. [18]) plusieurs cas particuliers de 7.1 ont déjà été démontrés sans recours à la géométrie algébrique : le cas de $\mathrm{SL}(n)$ par Waldspurger (cf. [27]), le cas de U(3) par Kottwitz d'une part (cf. [14]) et par Rogawski d'autre part (cf. [25]), et le cas de Sp(4) par Hales d'une part (cf. [9]) et Weissauer d'autre part (cf. [31]).

Par contre les deux théorèmes ci-dessous sont obtenus par voie géométrique, ce qui suppose que F soit d'égales caractéristiques (voir cependant la remarque 7.2 (iii)).

Théorème 8.1 (Goresky, Kottwitz et MacPherson [7]). *En plus des hypothèse de la conjecture* 7.1*, supposons que le tore anisotrope T est non ramifié, c'est-à-dire qu'il se déploie sur une extension finie non ramifiée de F, et que l'élément régulier semi-simple $\gamma \in \mathfrak{t}$ est d'égales valuations, c'est-à-dire que la valuation de $\alpha'(\gamma)$ ne dépende pas de la racine α de T dans G (α' est la dérivée de α). Alors*

$$\mathrm{O}_\gamma^{G,\kappa} = \varepsilon(\gamma)\mathrm{D}_H^G(\gamma)\mathrm{SO}_{[\gamma]}^H.$$

Théorème 8.2 (Laumon et Ngô [22]). *Reprenons les notations et les hypothèses de l'exemple* 4.1*. Nous avons donc le groupe réductif quasi-déployé $G = G_I$, une classe de conjugaison stable $[\gamma]$ dans $\mathfrak{g}_I$ pointée par un élément $\gamma = \gamma_I$ dans l'algèbre de Lie et un tore maximal anisotrope $T = T_I$ de G.*

Fixons une partition $I = I_1 \amalg I_2$, notons $H = G_{I_1} \times G_{I_2}$ le groupe endoscopique correspondant et encore $[\gamma]$ la classe de conjugaison stable dans $\mathfrak{h}$ de $\gamma \in \mathfrak{t}_I = \mathfrak{t}_{I_1} \oplus \mathfrak{t}_{I_2} \subset \mathfrak{h}$.

Supposons que F soit d'égales caractéristiques $p > n$. Alors on a la relation

$$\mathrm{O}_\gamma^\kappa = (-1)^r q^r\, \mathrm{SO}_{[\gamma]}^H$$

où

$$r = r_{I_1,I_2} = \sum_{\substack{i_1 \in I_1 \\ i_2 \in I_2}} r_{i_1,i_2}.$$

(*On rappelle que $r_{ij} = r_{ji}$ est la valuation du résultant* $\mathrm{Res}(P_i, P_j) \in F'$ *des polynômes minimaux $P_i(x)$ et $P_j(x)$ de γ_i et γ_j.*)

9. Fibres de Springer affines

Les preuves des théorèmes 8.1 et 8.2 sont fondées sur une interprétation cohomologique des deux membres du Lemme Fondamental à l'aide de la formule des points fixes de Grothendieck-Lefschetz. Cette interprétation fait intervenir les fibres de Springer affines qui sont des analogues pour les groupes de lacets des fibres de Springer classiques.

Soient k un corps algébriquement clos et G un groupe réductif sur k. On note $G((t))$ le ind-k-schéma en groupes de lacets des $k((t))$-points de G et $G[[t]] \subset G((t))$ son sous-k-schéma en groupes des $k[[t]]$-points de G. On ne tient pas compte ici des nilpotents éventuels de ces schémas.

Le ind-k-schéma réduit quotient $X = G((t))/G[[t]]$ est appelé la *grassmannienne affine* de G ; il est réunion croissante de k-schémas projectifs. Le ind-k-schéma en groupes $G((t))$ agit par translation à gauche sur X.

Pour $G = \mathrm{GL}_k(n)$ cette grassmannienne affine n'est autre que le ind-k-schéma réduit des $k[[t]]$-réseaux dans $k((t))^n$, c'est-à-dire des sous-$k[[t]]$-modules $M \subset k((t))^n$ tels qu'il existe un entier $N \geq 0$ avec $t^N k[[t]]^n \subset M \subset t^{-N} k[[t]]^n \subset k((t))^n$.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et γ un élément régulier semi-simple de $\mathfrak{g}((t)) = \mathfrak{g} \otimes_k k((t))$. La fibre de Springer affine en γ est le sous-ind-k-schéma fermé réduit X_γ de X dont l'ensemble des k-points est

$$X_\gamma(k) = \{gG(k[[t]]) \in X(k) \mid \mathrm{ad}(g^{-1})(\gamma) \in \mathfrak{g}[[t]]\}.$$

Pour que cet ensemble soit non vide il faut que, à conjugaison près on ait $\gamma \in \mathfrak{g}[[t]] = \mathfrak{g} \otimes_k k[[t]]$, ce que nous supposons dans la suite.

Pour $\mathrm{GL}_k(n)$ et $\gamma \in \mathrm{gl}(n, k[[t]])$ une matrice régulière semi-simple, la fibre de Springer affine est encore le ind-k-schéma réduit des $k[[t]]$-réseaux $M \subset k((t))^n$ tels que $\gamma M \subset M$.

Le centralisateur T de γ dans $G((t))$ est un tore maximal par hypothèse. L'action de $T \subset G((t))$ par translation à gauche sur X respecte le fermé X_γ. Le tore T contient un plus grand sous-tore de la forme $A((t))$ pour A un sous-tore de $\mathfrak{g}$ sur k (le sous-tore déployé maximal). Le groupe des co-caractères $X_*(A)$ agit librement sur X_γ par

$$\lambda \cdot gG[[t]] = \lambda(t)gG[[t]].$$

Dans [11], Kazhdan et Lusztig ont montré que X_γ est en fait un schéma localement de type fini et de dimension finie sur k, et que le quotient de X_γ par l'action libre de $X_*(A)$ ci-dessus est un k-schéma projectif, l'application quotient $X_\gamma \to X_\gamma/X_*(A)$ étant un revêtement étale galoisien de groupe de Galois $X_*(A)$.

La structure de ind-k-schéma de la grassmannienne affine X induit sur la fibre de Springer affine X_γ une structure analogue : X_γ est une réunion croissante de sous-k-schémas fermés projectifs.

Soit ℓ un nombre premier distinct de la caractéristique de k. On peut définir la cohomologie étale ℓ-adique de X_γ

$$H^i(X_\gamma, \mathbb{Q}_\ell).$$

comme la limite projective des cohomologies étales ℓ-adiques des sous-k-schémas fermés projectifs ci-dessus.

Si $k = \overline{\mathbb{F}}_q$ est la clôture algébrique d'un corps fini $\mathbb{F}_q$ et si G et γ sont définis sur ce corps fini, il en est bien entendu de même de $G((t))$, $G[[t]]$, X et X_γ. Par suite, pour tout nombre premier ℓ distinct de la caractéristique de k on a une action de l'endomorphisme de Frobenius géométrique Frob_q relatif à $\mathbb{F}_q$ sur la cohomologie étale ℓ-adique $H^i(X_\gamma, \mathbb{Q}_\ell)$.

Rappelons que si Z est un k-schéma propre sur $k = \overline{\mathbb{F}}_q$, qui est défini que $\mathbb{F}_q$, Deligne a montré que, quel que soit l'entier i, chaque valeur propre λ de Frob_q sur $H^i(Z, \mathbb{Q}_\ell)$ est un entier algébrique de poids $\leq i$, c'est-à-dire qu'il existe un entier $w(\lambda) \leq i$ tel que $|\iota(\lambda)| = q^{-w(\lambda)/2}$ pour tout plongement de $\iota\colon \mathbb{Q}(\lambda) \hookrightarrow \mathbb{C}$. On dit que la cohomologie étale ℓ-adique de Z est *pure* si pour tout entier i et toute valeur propre λ de Frob_q sur $H^i(Z, \mathbb{Q}_\ell)$, $w(\lambda) = i$ (cf. [6]). Toujours d'après Deligne c'est le cas si Z est supposé de plus lisse sur k (cf. loc. cit.). Les fibres de Springer sont des exemples de schémas propres non lisses dont la cohomologie étale ℓ-adique est pure (cf. [26]).

Cette notion de pureté garde un sens pour les fibres de Springer affines X_γ et Goresky, Kottwitz et MacPherson ont conjecturé dans [7] :

Conjecture 9.1. La cohomologie étale ℓ-adique de X_γ est pure.

Ils ont démontré cette conjecture dans un cas particulier (cf. [8]) :

Théorème 9.2 (Goresky, Kottwitz et MacPherson). *Supposons que γ est d'égales valuations, c'est-à-dire que la valuation de $\alpha'(\gamma)$ ne dépend pas de la racine α de T dans G ($\alpha'\colon \mathfrak{t} \to k((t))$ est la dérivée de α). Alors X_γ peut être pavé par des fibrés en espaces affines standard sur des variétés projectives et lisses sur k. En particulier la cohomologie étale ℓ-adique de X_γ est pure.*

10. L'approche de Goresky, Kottwitz et MacPherson

Soient toujours k une clôture algébrique d'un corps fini $\mathbb{F}_q$ et G un groupe réductif sur k que l'on suppose défini sur $\mathbb{F}_q$.

Soit $T \subset G$ un tore maximal défini sur $\mathbb{F}_q$ et $\gamma \in \mathfrak{t}[[t]]$ un élément régulier (semi-simple) dans $\mathfrak{g}((t))$ que l'on suppose rationnel sur $\mathbb{F}_q$, où bien sûr $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{g}$ sont les algèbres de Lie de T et G. Comme dans la section précédente on a la fibre de Springer affine

$$X_\gamma = \{gG[[t]] \mid g^{-1}\gamma g \in \mathfrak{g}[[t]]\} \subset X$$

en γ qui est laissée globalement invariante par l'action par translations à gauche du centralisateur $T((t)) \subset G((t))$ de γ. En particulier on a une action du tore $T \subset T((t))$ et du groupe des co-caractères $\Lambda = X_*(T) \cong t^{X_*(T)} \subset G((t))$ sur X qui laissent globalement invariante X_γ ; l'action de Λ sur X_γ est libre et commute à celle de T. La fibre de Springer X_γ et les actions de T et Λ sont définies sur $\mathbb{F}_q$.

Le lieu des points fixes de T agissant sur X est le fermé $X^T = T((t))/T[[t]] \subset G((t))/G[[t]] = X$ qui est automatiquement contenu dans X_γ et est donc le lieu des points fixes X_γ^T de l'action de T sur X_γ. Ce lieu est bien entendu globalement stable sous l'action de Λ et on peut l'identifier à Λ avec l'action de Λ par translation sur lui-même. La cohomologie étale ℓ-adique de $X_\gamma^T = X^T$ avec l'action induite de Λ est le $\mathbb{Q}_\ell[\Lambda]$-module $\mathbb{Q}_\ell[[\Lambda]]$.

Goresky, Kottwitz et MacPherson donnent une formule explicite pour la cohomologie étale ℓ-adique de X_γ sous l'hypothèse que cette cohomologie est pure. Ils déduisent cette formule d'une formule explicite pour la cohomologie étale ℓ-adique T-équivariante de X_γ qu'ils établissent en premier.

Avant d'énoncer leur résultat rappelons que la cohomologie étale ℓ-adique T-équivariante de $\mathrm{Spec}(k)$ avec l'action triviale de T est la $\mathbb{Q}_\ell$-algèbre graduée

$$H_T^*(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{Q}_\ell) = \bigoplus_{n\geq 0} H_T^{2n}(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{Q}_\ell) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{Sym}^n(X^*(T)(-1)) \otimes \mathbb{Q}_\ell,$$

où $\chi \in X^*(T)$ correspond à la classe de Chern du fibré en droites $\mathcal{L}_\chi$ sur le champ algébrique $[\mathrm{Spec}(k)/T]$, obtenu en poussant par χ le T-torseur universel. Rappelons aussi que cette $\mathbb{Q}_\ell$-algèbre graduée agit par le cup-produit sur la cohomologie étale ℓ-adique T-équivariante de tout ind-k-schéma muni d'une action de T. On a donc

$$H_T^*(X_\gamma^T, \mathbb{Q}_\ell) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{Sym}^n(X^*(T)(-1)) \otimes \mathbb{Q}_\ell[[\Lambda]]$$

en tant que $\bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{Sym}^n(X^*(T)(-1)) \otimes \mathbb{Q}_\ell[\Lambda]$-module gradué et un homomorphisme de $\bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{Sym}^n(X^*(T)(-1)) \otimes \mathbb{Q}_\ell[\Lambda]$-modules graduées

$$H_T^*(X_\gamma, \mathbb{Q}_\ell) \to H_T^*(X_\gamma^T, \mathbb{Q}_\ell) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{Sym}^n(X^*(T)(-1)) \otimes \mathbb{Q}_\ell[[\Lambda]].$$

de restriction au lieu des points fixes sous T. On notera par la multiplication à gauche l'action de $\mathrm{Sym}^*(X^*(T)(-1))$ et par la multiplication à droite celle de $\mathbb{Q}_\ell[\Lambda]$ pour clarifier l'exposition.

Théorème 10.1 (Goresky, Kottwitz et MacPherson). *Supposons que la cohomologie étale ℓ-adique de X_γ soit pure. Alors la flèche de restriction ci-dessus est injective et son image est formée en degré n des $f \in \mathrm{Sym}^n(X^*(T)(-1)) \otimes \mathbb{Q}_\ell[[\Lambda]]$ tels que, pour toute racine $\alpha \in X^*(T)$ de T dans G et tout entier $d = 1, 2, \ldots, v(\alpha(\gamma))$, on ait*

$$f(1 - \alpha^\vee)^d \in \alpha^d \mathrm{Sym}^{n-d}(X^*(T)(-1)) \otimes \mathbb{Q}_\ell[[\Lambda]]$$

où $\alpha' \colon \mathfrak{t}((t)) \to k((t))$ est la dérivée de α et où $\alpha^\vee \in \Lambda$ est la co-racine correspondante.

Le théorème 8.1 résulte des théorèmes 9.2 et 10.1

11. Notre approche avec Ngô

L'idée de départ est d'essayer de déformer les fibres de Springer en espérant qu'après déformation les choses deviennent plus simples. Bien sûr nous sommes guidés par l'analogie avec la résolution simultanée de Grothendieck-Springer qui regroupe en une seule famille toutes les fibres de Springer classiques.

Les fibres de Springer affines se comportent mal du point de vue des déformations et le point clé de notre approche est de les remplacer par des objets de nature globale que sont les jacobiennes compactifiées de courbes singulières, et de manière plus proche de la théorie des groupes par les fibres du morphisme de Hitchin.

Pour rendre les choses plus transparente je me limite dans la suite au cas où $G = \mathrm{GL}_k(n)$ bien que cela ne soit pas suffisant pour notre preuve du théorème 8.2.

Se donner un élément régulier semi-simple γ de $\mathfrak{g}((t))$ équivaut à se donner un polynôme unitaire séparable $P(x) \in k((t))[x]$ de degré n, et une base du $k((t))$-espace vectoriel $k((t))[x]/(P(x))$ de dimension n. Pour que la fibre de Springer affine X_γ soit non vide il faut que $P(x) \in k[[t]][x]$; pour simplifier l'exposition on suppose dans la suite que c'est bien le cas et que $P(0) \in tk[[t]]$. On introduit alors l'anneau $R_\gamma = k[[t]][\gamma] = k[[t]][x]/(P(x))$; c'est une k-algèbre réduite, non normale, d'anneau total des fractions $\mathrm{Frac}(R_\gamma) = k((t))[x]/(P(x))$.

Pour toute k-algèbre réduite complète R isomorphe à $k[[x, y]]/(f)$ pour $f \in (x, y) \subset k[[x, y]]$ (comme l'est R_γ), on dispose d'un k-schéma en groupes commutatifs P_R et d'une "compactification" équivariante $\overline{P}_R$ de ce dernier.

Le groupe de k-points de P_R est simplement $\mathrm{Frac}(R)^\times/R^\times$ où $\mathrm{Frac}(R)$ est l'anneau total des fractions de R ; le groupe des composantes connexes de P_R est $\mathbb{Z}^I$ où I est l'ensemble des points génériques de $\mathrm{Spec}(R)$ (ou ce qui revient au même des facteurs irréductibles de f) et la composante neutre P_R^0 de P_R est un k-schéma en groupes de type fini extension d'une tore $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^I/\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}$ par un groupe unipotent. On peut voir P_R comme l'espace de modules des R-modules M libres de rang 1 munis d'un isomorphisme $\mathrm{Frac}(R) \otimes_R M \cong \mathrm{Frac}(R)$

Le k-schéma $\overline{P}_R$ est lui l'espace de modules des R-modules M de type fini sans torsion munis d'un isomorphisme $\mathrm{Frac}(R) \otimes_R M \cong \mathrm{Frac}(R)$; P_R qui est évidemment contenu dans $\overline{P}_R$, agit par produit tensoriel sur ce dernier.

Proposition 11.1 (cf. [21]). *La fibre de Springer affine X_γ est homéomorphe à $\overline{P}_{R_\gamma}$.*

Soit maintenant C une courbe réduite, connexe et projective sur k. Le k-champ algébrique de Picard $\mathrm{Pic}(C)$ de C est l'espace de modules des $\mathcal{O}_C$-Modules inversibles $\mathcal{L}$. Ce champ algébrique est lisse sur k et le produit tensoriel le munit d'une structure de champ algébrique en "groupes commutatifs".

Les composantes connexes de $\mathrm{Pic}(C)$ sont découpées par l'invariant discret $\deg(\mathcal{L}) = \chi(C, \mathcal{L}) - \chi(C, \mathcal{O}_C)$; elles sont de type fini si et seulement si C est irréductible.

Mayer et Mumford ont introduit une “compactification” équivariante de $\mathrm{Pic}(C)$ (cf. [2]). Plus précisément ils ont introduit le k-champ algébrique $\overline{\mathrm{Pic}}(C)$ des $\mathcal{O}_C$-Modules cohérents $\mathcal{F}$ sans torsion de rangs génériques tous égaux à 1. On a une immersion ouverte évidente de $\mathrm{Pic}(C) \hookrightarrow \overline{\mathrm{Pic}}(C)$ et l'action par translation de $\mathrm{Pic}(C)$ sur lui-même se prolonge en l'action de $\mathrm{Pic}(C)$ sur $\overline{\mathrm{Pic}}(C)$ induite par le produit tensoriel. En général $\overline{\mathrm{Pic}}(C)$ n'est pas lisse sur k.

Les composantes connexes de $\mathrm{Pic}(C)$ sont elles aussi découpées par le degré de $\mathcal{F}$. Elles sont de type fini que si et seulement si C est irréductible. Par contre elles ne sont pas irréductibles en général car $\mathrm{Pic}(C)$ n'est pas toujours dense dans $\overline{\mathrm{Pic}}(C)$ et la dimension de $\overline{\mathrm{Pic}}(C)$ peut être strictement plus grande que celle de $\mathrm{Pic}(C)$.

Cependant, si les singularités de C sont toutes planes, c'est-à-dire si le complété formel de $\mathcal{O}_{C,c}$ est isomorphe à $k[[x,y]]/(f(x,y))$ pour $f(x,y) \in (x,y) \subset k[[x,y]]$ quel que soit le point singulier c de C, alors Rego d'une part (cf. [24]) et Altmann, Iarrobino et Kleiman d'autre part (cf. [1]) ont montré que $\mathrm{Pic}(C)$ est dense dans $\overline{\mathrm{Pic}}(C)$ (ces auteurs ne considèrent que le cas où C est irréductible mais leur argument est général).

Supposons dorénavant que notre courbe C réduite, connexe et projective sur k a toutes ses singularités planes. Notons $C^{\mathrm{sing}} \subset C$ l'ensemble fini de ses singularités. On a un k-morphisme de champs algébriques

$$\prod_{c \in C^{\mathrm{sing}}} \bar{P}_{\widehat{\mathcal{O}}_{C,c}} \to \overline{\mathrm{Pic}}(C)$$

qui envoie $(M_c)_c$ sur le $\mathcal{O}_C$-Module cohérent obtenu en recollant $\mathcal{O}_{C-C^{\mathrm{sing}}}$ et les M_c le long de $(C - C^{\mathrm{sing}}) \cap \coprod_{c\in C^{\mathrm{sing}}} \mathrm{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_{C,c}) = \coprod_{c\in C^{\mathrm{sing}}} \mathrm{Spec}(\mathrm{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_{C,c}))$. Ce morphisme induit un morphisme de champs algébriques en groupes commutatifs

$$\prod_{c \in C^{\mathrm{sing}}} P_{\widehat{\mathcal{O}}_{C,c}} \to \mathrm{Pic}(C).$$

Proposition 11.2. *Le k-morphisme de champs algébriques déduit des morphismes précédents par passage au quotient*

$$\prod_{c \in C^{\mathrm{sing}}} [\bar{P}_{\widehat{\mathcal{O}}_{C,c}}/P_{\widehat{\mathcal{O}}_{C,c}}] \to [\overline{\mathrm{Pic}}(C)/\mathrm{Pic}(C)]$$

est un isomorphisme.

Compte-tenu de cette proposition et de la proposition 11.1 la conjecture de pureté de Goresky, Kottwitz et MacPherson 9.1 implique en particulier la conjecture suivante.

Conjecture 11.3. Soit C une courbe intègre et projective sur la clôture algébrique d'un corps fini. On suppose que toutes les singularités de C sont planes et unibranches. Alors la cohomologie ℓ-adique de $\overline{\mathrm{Pic}}(C)^0$ est pure.

Les propositions 11.1 et 11.2 permettent de donner une interprétation cohomologique des intégrales orbitales pour G en termes de $\overline{\mathrm{Pic}}(C)$ pour une courbe C convenable (cf. [21]). Un des gros avantages des champs de Picard compactifiés par rapport aux fibres de Springer affines est que toute déformation de C donne lieu à une déformation de $\overline{\mathrm{Pic}}(C)$.

La fibration de Hitchin fournit de manière naturelle du point de vue de la théorie des groupes une telle déformation (cf. [23]).

Changeons de notations. Soit maintenant C une courbe connexe, projective et lisse de genre $g \geq 2$ sur un corps k algébriquement clos et D un diviseur effectif de degré $\geq 2g-2$ sur C. On dispose du k-champ algébrique $\mathcal{M}$ des couples $(\mathcal{E}, \theta)$ où $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel de rang n sur C et $\theta\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}(D)$ est un endomorphisme tordu de $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{A}$ le k-espace vectoriel de dimension finie $\bigoplus_{i=1}^{n} H^0(X, \mathcal{O}_C(iD))$ vu comme un k-schéma affine. La fibration de Hitchin (cf. [10])

$$m\colon \mathcal{M} \to \mathcal{A}$$

est le morphisme qui envoie $(\mathcal{E}, \theta)$ sur le polynôme caractéristique de θ, c'est-à-dire défini par

$$m(\mathcal{E}, \theta) = (-\mathrm{tr}(\theta), \mathrm{tr}(\wedge^2\theta), \ldots, (-1)^n \mathrm{tr}(\wedge^n\theta))$$

Tout point $a \in \mathcal{A}$ définit un diviseur de Cartier C_a dans la surface réglée $\mathbb{V}(\mathcal{O}_C(-D))$, diviseur appelé par Hitchin la *courbe spectrale* en a, à savoir le diviseur d'équation

$$u^n + p^*a_1u^{n-1} + \cdots + p^*a_n = 0$$

où $p\colon \mathbb{V}(\mathcal{O}_C(-D)) \to C$ est la projection canonique et u est la section universelle de $p^*\mathcal{O}(-D)$. La restriction π_a de p à cette courbe C_a en fait un revêtement fini ramifié de C. Par construction $\pi_{a,*}\mathcal{O}_{C_a}$ est isomorphe à

$$\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_C(-D))/\mathcal{I}_a$$

où $\mathcal{I}_a$ est l'Idéal engendré par l'image de l'homomorphisme

$$\mathcal{O}_C(-nD) \to \bigoplus_{i=0}^{n} \mathcal{O}_C(-iD) \subset \mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_C(-D))$$

de composantes $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, 1)$.

Supposons que C_a est réduite. On a alors un morphisme du champ algébrique $\overline{\mathrm{Pic}}(C_a)$ des $\mathcal{O}_{C_a}$-Modules cohérents sans torsion de rang 1 en tout point générique de C_a dans la fibre de la fibration de Hitchin $m^{-1}(a) = \mathcal{M}_a$ en a :

$$\overline{\mathrm{Pic}}(C_a) \to m^{-1}(a),\ \mathcal{F} \mapsto (\mathcal{E}, \theta)$$

où $\mathcal{E} = \pi_{a,*}\mathcal{F}$ et

$$\theta\colon \mathcal{O}_C(-D) \subset \mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_C(-D))/\mathcal{I}_a = \pi_{a,*}\mathcal{O}_{C_a} \to \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{E}).$$

Proposition 11.4 (Beauville, Narasimhan et Ramanan [4]). *Le morphisme de champs algébriques ci-dessus est un isomorphisme.*

Compte tenu des proposition 11.1 et 11.2, on a donc un lien entre les fibres de la fibration de Hitchin et fibres de Springer affines via les jacobiennes compactifiées. La fibration de Hitchin peut donc être vue comme une famille naturelle de (produits de) fibres de Springer affines. Elle joue un peu le rôle de la résolution simultanée de Grothendieck-Springer pour les fibres de Springer affines. C'est le point de départ de notre démonstration du théorème 8.2.

Remerciements. Je remercie Pierre-Henri Chaudouard et Ngô Bao Châu pour leur aide durant la préparation de cet exposé.

Références

[1] Altman, A., Iarrobino, A., et Kleiman, S., Irreducibility of the Compactified Jacobian. Dans *Real and complex singularities, Oslo 1976* (ed. par. P. Holm), Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn 1977, 1–12.

[2] Altman, A., et Kleiman, S., Compactifying the Jacobian. *Bull. Amer. Math. Soc.* **82** (1976), 947–949.

[3] Arthur, J., Toward a stable trace formula. Dans *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Berlin, 1998), Vol. II, Doc. Math., J. DMV, Extra Vol. ICM Berlin, 507–517.

[4] Beauville, A., Narasimhan, M., et Ramanan, S., Spectral curve and the generalised theta divisor. *J. Reine Angew. Math.* **398** (1989), 169–179.

[5] Dat, J.-F., Lemme fondamental et endoscopie, une approche géométrique. *Séminaire Bourbaki* **940** (2004).

[6] Deligne, P., La conjecture de Weil. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **52** (1980), 313–428.

[7] Goresky, M. , Kottwitz, R., et MacPherson, R., Homology of affine Springer fiber in the unramified case. *Duke Math. J.* **121** (2004), 509–561.

[8] Goresky, M. , Kottwitz, R., et MacPherson, R., Purity of equivalued affine Springer fibers. Prépublication ; arXiv math.RT/0305141.

[9] Hales, T., The fundamental lemma for Sp(4). *Proc. Amer. Math. Soc.* **125** (1997), 301–308.

[10] Hitchin, N., Stable bundles and integrable connections. *Duke Math. J.* **54** (1987), 91–114.

[11] Kazhdan, D., et Lusztig, G., Fixed Point Varieties on Affine Flag Manifolds. *Israel J. Math.* **62** (1988), 129–168.

[12] Kottwitz, R., Stable trace formula : elliptic singular terms. *Math. Ann.* **275** (1986), 365–399.

[13] Kottwitz, R., Shimura varieties and λ-adic representations. Dans *Automorphic Forms, Shimura Varieties and L-functions* (Ann Arbor 1988), Perspect. Math. 10, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1990, 161–209.

[14] Kottwitz, R., Calculation of some orbital integrals. Dans *The zeta functions of Picard modular surfaces* (ed. par. R. P. Langlands and D. Ramakrishnan), Université de Montréal, Centre de Recherches Mathématiques, Montreal, QC, 1992, 349–362.

[15] Kottwitz, R. Transfer factors for Lie algebras. *Represent. Theory* **3** (1999), 127–138.

[16] Kottwitz, R., Harmonic Analysis on semi-simple p-adic Lie algebras. Dans *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Berlin, 1998), Vol. II, Doc. Math., J. DMV, Extra Vol. ICM Berlin, 1998, 553–562.

[17] Kottwitz, R., et Shelstad, D., Foundations of twisted endoscopy. *Astérisque* **225** (1999).

[18] Labesse, J.-P., et Langlands, R., L-indistinguishability for SL(2). *Canad. J. Math.* **31** (1979), 726–785.

[19] Langlands, R., *Les débuts d'une formule des traces stables*. Publications de l'Université Paris VII 13, 1983.

[20] Langlands, R., et Shelstad, D., On the definition of transfer factors. *Math. Ann.* **278** (1987), 219–271.

[21] Laumon, G., Fibres de Springer et jacobiennes compactifiées. Prépublication ; arXiv math.AG/0204109.

[22] Laumon, G., et Ngô, B.-C., Le lemme fondamental pour les groupes unitaires. Prépublication ; arXiv math.AG/0404454.

[23] Ngô, B.-C., Fibration de Hitchin et structure endoscopique de la formule des traces. Dans *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Madrid, 2006), Volume II, EMS Publishing House, Zürich 2006, 1213–1225.

[24] Rego, C. J., The Compactified Jacobian. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **13** (1980), 211–223.

[25] Rogawski, J., *Automorphic representations of unitary groups in three variables.* Ann. of Math. Stud. 123, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.

[26] Springer, T. A., A purity result for fixed point varieties in flag manifolds. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **31** (1984), 271–282.

[27] Waldspurger, J.-L., Sur les intégrales orbitales tordues pour les groupes linéaires : un lemme fondamental. *Canad. J. Math.* **43** (1991), 852–896.

[28] Waldspurger, J.-L., Comparaison d'intégrales orbitales pour des groupes p-adiques. Dans *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Zürich, 1994), Vol. 2, Birkhäuser, Basel 1995, 807–816.

[29] Waldspurger, J.-L., Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés. *Astérisque* **269** (2001).

[30] Waldspurger, J.-L., Endoscopie et changement de caractéristique. Prépublication.

[31] Weissauer, R., A special case of fundamental lemma. Prépublication.

Université Paris-Sud, Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France
E-mail: gerard.laumon@math.u-psud.fr