Fibration de Hitchin et structure endoscopique de la formule des traces

Bao-Châu Ngô

Abstract. The Hitchin fibration is a well suited tool to study the geometric side of the trace formula for Lie algebra from the point of view of moduli spaces of vector bundles over a curve. The endoscopy groups appear naturally when we decompose the cohomology of the Hitchin fibration by its natural symmetries. Following this dictionary, we can formulate a global and geometric version of Langlands–Shelstad's fundamental lemma. This conjecture has been proved in the case of unitary groups in a joint work with G. Laumon.

Résumé. La fibration de Hitchin fournit un outil adapté pour explorer le côté géométrique de la formule des traces pour l'algèbre de Lie du point de vue des espaces de module des fibrés sur une courbe. Les groupes d'endoscopie apparaissent naturellement quand on cherche à décomposer la cohomologie de la fibration de Hitchin par ses symétries naturelles. En poursuivant ce dictionnaire, on peut formuler une version globale et géométrique du lemme fondamental de Langlands et Shelstad. Cette conjecture a été démontrée dans le cas particulier des groupes unitaires dans un travail en commun avec G. Laumon.

Mathematics Subject Classification (2000). Primary 14H60, 11F72 ; Secondary 22E35.

Keywords. Trace formula, endoscopy groups, fundamental lemma, moduli spaces of vector bundles.

Mots-clés. Formule des traces, groupes endoscopiques, lemme fondamental, espace de module des fibrés.

1. Commentaires historiques

La stabilisation de la formule des traces est l'un des objectifs de la théorie des représentations automorphes. On ne saurait mieux l'introduire que Langlands l'a fait dans les premières lignes de [15] :

En principe la formule des traces exprime la trace comme une somme sur les classes de conjugaison d'un groupe $G(F)$, F étant un corps global et G un groupe réductif. Donc si l'on veut par exemple comparer la trace pour un groupe quasi-déployé G^* et une forme intérieure G comme on l'a fait dans [13] *il faut trouver une application naturelle de l'ensemble des classes de conjugaison de $G(F)$ dans celui des classes de $G^*(F)$, ce qui est en général impossible. En revanche, si on passe*

Proceedings of the International Congress
of Mathematicians, Madrid, Spain, 2006

aux classes de conjugaison stable une telle application existe et facile à définir. Par conséquent pour imiter les méthodes de [13] *il faut d'abord trouver une formule des traces qui s'exprime comme somme sur les classes de conjugaison stable …*

Les travaux de Langlands et Kottwitz ont fait surgir les groupes endoscopiques de la structure interne de la somme sur les classes de conjugaison elliptiques de $G(F)$. Pour stabiliser la partie elliptique de la formule des traces, il reste à démontrer la conjecture de transfert et le lemme fondamental. Ces conjectures consistent en gros en une comparaison d'intégrales orbitales sur G et sur un groupe endoscopique H. Les travaux de Langlands et Kottwitz sur la partie elliptique ont été considérablement généralisés par Arthur à toute la formule des traces [1].

Les méthodes dites élémentaires ont permis d'établir ces conjectures dans les cas suivants : SL(2) par Labesse et Langlands [14], U(3) par Rogawski [23], Sp(4) par Hales [9], Weissauer [28] et SL(n) par Waldspurger [24]. De plus, Waldspurger a démontré que dans le cas des algèbres de Lie, le lemme fondamental implique la conjecture de transfert [26].

Plus récemment, les travaux de Goresky, Kottwitz et MacPherson [7], de Laumon [17], [18], de Laumon et moi-même [20] donnent un espoir qu'on pourrait démontrer le lemme fondamental en général par des méthodes géométriques. Nous renvoyons à l'exposé Bourbaki de J.-F. Dat [4] et au rapport de Laumon dans ces volumes pour un survol de l'approche géométrique du lemme fondamental.

L'objet du présent rapport est de décrire géométriquement la structure endoscopique de la partie anisotrope la formule des traces [15], [12] suivant [21]. Cette étape se trouve historiquement en amont du lemme fondamental. Du point de vue géométrique, elle permet d'interpoler le lemme fondamental dans une déformation naturelle et d'utiliser des arguments en famille comme la notion de faisceaux pervers purs qui sont déterminants dans [20].

Notre interprétation géométrique est fondée sur la fibration de Hitchin. C'est une variante globale des fibres de Springer affines que Goresky, Kottwitz et MacPherson ont utilisées pour interpréter les intégrales orbitales locales. Les fibres de la fibration de Hitchin pour GL(n) sont des jacobiennes compactifiées de même type que celles qui sont construites par Laumon dans [17].

L'inconvénient de l'approche géométrique est qu'elle s'adapte bien mal à la caractéristique zéro. Heureusement, grâce aux travaux de Waldspurger [27] et de Cluckers–Loeser [3], le lemme fondamental en caractéristique zéro peut se déduire du lemme fondamental en caractéristique positive.

2. Fibration de Hitchin

Soit X une courbe projective lisse sur un corps k. Soit D un diviseur de X de degré $\deg(D) > 2g - 2$ où $g > 2$ est le genre de X. Soit G un groupe réductif sur k ou plus généralement un schéma en groupes réductifs sur X. Pour un triplet (X, D, G)

donné, on considère l'espace de module $\mathcal{M}$ des couples (E, ϕ) où E est un G-torseur sur X et où ϕ est une section

$$\phi \in \mathrm{H}^0(X,\ \mathrm{ad}(E)(D))$$

où $\mathrm{ad}(E)$ est le fibré vectoriel qui se déduit du G-torseur E et de la représentation adjointe de G et où on a noté $V(D) = V \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D)$ pour tout fibré vectoriel V sur X. Il est plus agréable de considérer le champ algébrique $\mathcal{M}$, voir [19], plutôt que l'espace de module grossier associé à l'ouvert semi-stable de ce champ. La structure symplectique sur $\mathcal{M}$, qui existe naturellement dans le cas où D est le diviseur canonique de X, ne semble pas jouer de rôle dans notre problème.

Dans le cas où $G = \mathrm{GL}(n)$, la donnée de E consiste en la donnée d'un fibré vectoriel V de rang n sur X et celle de ϕ est équivalente à la donnée d'un endomorphisme tordu $\phi\colon V \to V(D)$. On renvoie à [10] pour une description similaire dans le cas où G est un groupe classique.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, $k[\mathfrak{g}]$ l'anneau des fonctions polynômiales sur $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie d'un tore maximal T de G et soit W le groupe de Weyl. Si k est un corps de caractéristique nulle ou grande par rapport à $\mathfrak{g}$, on sait d'après Chevalley et Kostant que l'anneau des invariants $k[\mathfrak{g}]^G = k[\mathfrak{t}]^W$ est un anneau des polynômes $k[u_1, \ldots, u_r]$ où r est le rang de G et où $u_1, \ldots, u_r$ sont des polynômes homogènes de degrés $d_1, \ldots, d_r$. Notons

$$\mathfrak{t}/W = \mathrm{Spec}(k[\mathfrak{t}]^W) = \mathrm{Spec}(k[u_1, \ldots, u_r]).$$

L'inclusion $k[\mathfrak{g}]^G \to k[\mathfrak{g}]$ définit le morphisme caractéristique de Chevalley

$$\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{t}/W \tag{1}$$

qui généralise la construction du polynôme caractéristique dans le cas $\mathrm{GL}(n)$. En appliquant χ à la section $\phi \in \mathrm{H}^0(X, \mathrm{ad}(E)(D))$, on trouve une section

$$a \in \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(d_i D)).$$

Il revient au même de dire que a est une section globale $(\mathfrak{t}/W) \times^{\mathbb{G}_m} L_D$ où L_D est le $\mathbb{G}_m$-torseur sur X associé au fibré en droites $\mathcal{O}_X(D)$.

On obtient ainsi une fibration

$$m\colon \mathcal{M} \to \mathcal{A}$$

où $\mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(d_i D))$ est un espace affine sur k dont la dimension dépend du triplet (X, D, G). Dans le cas $G = \mathrm{GL}(n)$, pour tout point (V, ϕ) de $\mathcal{M}$, on a $m(V, \phi) = (a_1, \ldots, a_n)$ où $a_i \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(iD))$ est la trace de $\wedge^i \phi\colon\ \wedge^i V \to \wedge^i V(iD)$.

Supposons que $k = \mathbb{F}_q$ est un corps fini. En suivant le comptage de Weil des fibrés vectoriels sur une courbe, on peut exprimer formellement le nombre pondéré des points de $\mathcal{M}(\mathbb{F}_q)$

$$|\mathcal{M}(\mathbb{F}_q)| = \sum_{(E,\phi)\in\mathcal{M}(\mathbb{F}_q)} \frac{1}{\mathrm{Aut}(E,\phi)}$$

en termes d'intégrales adéliques. Soient F le corps des fonctions rationnelles sur X, F_v le complété de F en un point fermé $v \in |X|$, $\mathcal{O}_v$ l'anneau des entiers de F_v et $\mathbb{A}_F$ l'anneau des adèles de F. On a alors

$$|\mathcal{M}(\mathbb{F}_q)| = \sum_{\xi\in\ker^1(F,G)} \sum_{\gamma\in\mathfrak{g}^\xi(F)/\sim} O_\gamma(1_D) \tag{2}$$

où

- $\ker^1(F,G)$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme des G-torseurs sur F, triviaux localement sur chaque F_v ;
- $\mathfrak{g}^\xi$ est la forme de $\mathfrak{g}$ sur F définie par ξ ;
- γ parcourt l'ensemble des classes de conjugaison de $\mathfrak{g}^\xi(F)$;
- $O_\gamma(1_D)$ est l'intégrale orbitale globale

  $$O_\gamma(1_D) = \int_{G_\gamma(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} 1_D(\mathrm{ad}(g)^{-1}\gamma)\, dg$$

  de la fonction

  $$1_D = \bigotimes_{v\in|X|} 1_{D_v},$$

  1_{D_v} étant la fonction caractéristique du compact ouvert $\varpi^{-d_v}\mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$ de $\mathfrak{g}(F_v)$, les entiers d_v étant définis par la formule $D = \sum_{v\in|X|} d_v v$;
- dg est la mesure de Haar normalisée de $G(\mathbb{A})$ de telle façon que $G(\mathcal{O}_\mathbb{A})$ ait volume 1.

L'égalité ci-dessus n'a pas de sens numérique, ses deux membres n'étant pas finis, mais elle peut s'interpréter en termes d'équivalence de catégories. L'égalité heuristique peut néanmoins servir comme un bon guide. On reconnaît dans le membre de droite l'expression formelle du côté géométrique de la formule des traces pour l'algèbre de Lie. Cette égalité formelle est donc le début d'un dictionnaire que nous allons poursuivre.

Pour $a \in \mathcal{A}(\mathbb{F}_q)$, on note $\mathcal{M}_a = m^{-1}(a)$ la fibre de m en a. Le point a peut être vu comme un élément de $(\mathfrak{t}/W)(F)$ vérifiant une condition d'intégralité par rapport à D. Supposons désormais que a est une caractéristique semi-simple régulière c'est-à-dire il correspond à un F-point du l'ouvert $\mathfrak{t}/W$ où le morphisme $\mathfrak{t} \to \mathfrak{t}/W$ est étale. Cette condition semi-simple régulière définit un ouvert non vide $\mathcal{A}^\heartsuit$ de $\mathcal{A}$. Pour tout

$a \in \mathcal{A}(\mathbb{F}_q)$, on a formellement

$$|\mathcal{M}_a(\mathbb{F}_q)| = \sum_{\xi \in \ker^1(F,G)} \sum_{\substack{\gamma \in \mathfrak{g}^{\xi}(F)/\sim \\ \chi(\gamma)=a}} O_\gamma(1_D). \tag{3}$$

Lorsque $a \in \mathcal{A}^{\heartsuit}(\mathbb{F}_q)$ la seconde somme s'étend donc sur une classe de conjugaison stable globale dans $\mathfrak{g}^{\xi}(F)$. Ainsi la fibration de Hitchin correspond essentiellement au découpage de la formule des traces en des classes de conjugaison stable globale.

Notons aussi que d'après la formule des traces de Grothendieck–Lefschetz, on a aussi formellement

$$|\mathcal{M}_a(\mathbb{F}_q)| = \mathrm{Tr}(\mathrm{F}_q, (m_*\mathbb{Q}_\ell)_a) \tag{4}$$

où $m_*\mathbb{Q}_\ell$ est l'image directe dérivée du faisceau constant $\mathbb{Q}_\ell$ et où F_q est l'endomorphisme de Frobenius géométrique. Ainsi le complexe $m_*\mathbb{Q}_\ell$ interpole les sommes (3) dépendant du paramètre a.

Notons que lorsque a appartient à l'ouvert anisotrope $\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$ de $\mathcal{A}^{\heartsuit}$, les deux côtés de (3) sont des sommes finies et on a dans ce cas une égalité numérique au lieu d'une équivalence de catégories. Nous envoyons à [21] pour la définition précise des ouverts $\mathcal{A}^{\mathrm{ani}} \subset \mathcal{A}^{\heartsuit}$ de $\mathcal{A}$. Pour les lecteurs familiers avec les courbes spectrales de [10], mentionnons que dans le cas $G = \mathrm{GL}(n)$ et la caractéristique p est plus grande que n, $\mathcal{A}^{\heartsuit}$ consiste en les caractéristiques a telles que la courbe spectrale Y_a est réduite. L'ouvert $\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$ est non vide seulement pour les G semi-simples et contient alors les $a \in \mathcal{A}$ telle que la courbe spectrale Y_a est irréductible dans le cas $\mathrm{SL}(n)$. Pour les groupes classiques, $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$ si l'involution naturelle du groupe classique agit trivialement sur l'ensemble des composantes irréductibles de la courbe spectrale définie dans [9]. Les formules (2) et (3) ont un sens numérique quand nous nous limitons à la partie anisotrope.

Théorème 2.1. *La fibration de Hitchin $m\colon \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ est lisse sur l'ouvert $\mathcal{A}^{\heartsuit}$ et est propre sur l'ouvert $\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$.*

Les arguments nécessaires pour démontrer ce théorème étaient déjà dans la littérature, voir notamment [2] et [6], seules les définitions des ouverts $\mathcal{A}^{\heartsuit}$ et $\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$ ont apparu plus tard dans [21]. L'énoncé de lissité a été démontré dans [21], celui de propreté dans le cas particulier du groupe unitaire dans [20].

3. Stabilisation de la partie anisotrope

La partie anisotropique de la somme (3) peut être transformée de la même façon que la stabilisation de la partie elliptique de la formule des traces suivant Langlands et Kottwitz [15] et [12]. À la différence de la formule des traces, le comptage de points de $\mathcal{M}$, tout comme celui des points des variétés de Shimura et de Drinfeld, comporte en plus une première sommation sur $\ker^1(F, G)$ qui, en fait, simplifie la stabilisation.

Supposons que a est semi-simple régulier. Donnons-nous un élément $\gamma_0 \in \mathfrak{g}(F)$ d'image $\chi(\gamma_0) = a$. Le centralisateur I_{γ_0} est un tore qui ne dépend pas du choix de γ_0. On le notera I_a et on le supposera *anisotrope*. Le tore dual $\hat{I}_a$ est muni d'une action finie de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ telle que $\hat{I}_a^{\Gamma}$ est fini.

Pour tout $\xi \in \ker^1(F, G)$, les classes de conjugaison $\gamma \in \mathfrak{g}^{\xi}(F)$ telles que $\chi(\gamma) = a$ sont en bijection avec les classes de cohomologie

$$\alpha = \mathrm{inv}(\gamma_0, \gamma) \in \mathrm{H}^1(F, I_a)$$

dont l'image dans $\mathrm{H}^1(F, G)$ est l'élément ξ. Ainsi l'ensemble des paires (ξ, γ) de la somme (3) où $\xi \in \ker^1(F, G)$ et γ est une classe de conjugaison de $\mathfrak{g}^{\xi}(F)$ d'image $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{ani}}(\mathbb{F}_q)$ est en bijection avec

$$\ker[\mathrm{H}^1(F, I_a) \to \bigoplus_{v \in |X|} \mathrm{H}^1(F_v, G)].$$

Pour toute place $v \in |X|$, donner une classe de conjugaison $\gamma_v \in \mathfrak{g}(F_v)$ telle que $\chi(\gamma_v) = a$ revient à donner son invariant

$$\alpha_v = \mathrm{inv}_v(\gamma_0, \gamma_v) \in \ker[\mathrm{H}^1(F_v, I_a) \to \mathrm{H}^1(F_v, G)].$$

D'après Kottwitz, ce groupe peut être décrit en termes des groupes duaux de la façon suivante. Soit Γ_v le groupe de Galois local $\mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v)$. D'après la dualité de Nakayama, donner un élément $\alpha_v \in \mathrm{H}^1(F_v, I_a)$ revient à donner un caractère d'ordre fini $\alpha_v \colon \hat{I}_a^{\Gamma_v} \to \mathbb{C}^{\times}$. Pour que l'élément α_v ait l'image triviale dans $\mathrm{H}^1(F_v, G)$, il faut et il suffit que la restriction du caractère α_v à $Z_{\hat{G}}^{\Gamma_v}$ est triviale où $Z_{\hat{G}}$ est le centre du groupe dual $\hat{G}$.

Pour qu'une collection de classes de conjugaison $(\gamma_v)_{v \in |X|}$ de $\mathfrak{g}(F_v)$ avec $\chi(\gamma_v) = a$ provienne d'une paire (ξ, γ) de la somme (3), il faut et il suffit que $\gamma_v = \gamma_0$ pour presque tout v et que

$$\sum_{v \in |X|} \alpha_v|_{\hat{I}_a^{\Gamma}} = 0 \tag{5}$$

où $\alpha_v = \mathrm{inv}_v(\gamma_0, \gamma_v)$. Si c'est le cas, le nombre des paires (ξ, γ) qui s'envoie sur cette collection $(\gamma_v)_{v \in |X|}$ est égal au cardinal du groupe

$$\ker^1(F, I_a) = \ker[\mathrm{H}^1(F, I_a) \to \bigoplus_{v \in |X|} \mathrm{H}^1(F_v, I_a)].$$

La somme (3) se récrit comme suit

$$|\ker^1(F, I_a)|\, \tau(I_a) \sum_{(\gamma_v)_{v \in |X|}} \prod_v O_{\gamma_v}(1_{D_v}) \tag{6}$$

où les γ_v sont des classes de conjugaison de $\mathfrak{g}(F_v)$ vérifiant l'équation (5). En mettant en facteur le nombre de Tamagawa $\tau(I_a)$, on trouve une somme de produits d'intégrales orbitales locales $\prod_v O_{\gamma_v}(1_{D_v})$ au lieu des intégrale globales $O_\gamma(1_D)$.

En appliquant la formule d'Ono [22]

$$|\ker^1(F, I_a)|\,\tau(I_a) = |\pi_0(\hat{I}_a^\Gamma)|,$$

la somme (3) devient

$$|\pi_0(\hat{I}_a^\Gamma)| \sum_{(\gamma_v)_{v\in|X|}} \prod_v O_{\gamma_v}(1_{D_v}) \tag{7}$$

où les (γ_v) vérifie la condition (5). Notons qu'avec l'hypothèse I_a anisotrope, le groupe $\hat{I}_a$ est un groupe fini de sorte que $\pi_0(\hat{I}_a^\Gamma) = \hat{I}_a^\Gamma$.

En utilisant la transformation de Fourier sur le groupe fini $\hat{I}_a^\Gamma$, la somme (3) devient

$$|\mathcal{M}_a(\mathbb{F}_q)| = \sum_{\kappa\in\hat{I}_a^\Gamma} O_a^\kappa(1_D) \tag{8}$$

avec

$$O_a^\kappa(1_D) = \prod_{v\in|X|} \sum_{\substack{\gamma_v\in\mathfrak{g}(F_v)/\sim \\ \chi(\gamma_v)=a}} \langle \mathrm{inv}_v(\gamma_0, \gamma_v), \kappa\rangle\, O_{\gamma_v}(1_{D_v}) \tag{9}$$

qui ne dépend pas du choix de $\gamma_0 \in \mathfrak{g}(F)$. Nous appelons cette expression la κ-décomposition de (3). Elle ne dépend en fait pas du choix de l'élément γ_0. Ceci suggère l'existence d'une décomposition naturelle de la cohomologie de la fibre $\mathcal{M}_a$.

D'après [15] et [12, 9.6], cette κ-décomposition s'organise quand a varie en une somme en les classes $[\kappa]$ de $\hat{G}$-conjugaison des éléments d'ordre fini de $\hat{G}$. À la suite de (8), la partie anisotropique de (2) se récrit comme suit

$$|\mathcal{M}^{\mathrm{ani}}(\mathbb{F}_q)| = \sum_{[\kappa]\in\hat{G}/\sim} \sum_{a\in\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}(\mathbb{F}_q)} \sum_{\kappa\in\hat{I}_a^\Gamma\cap[\kappa]} O_a^\kappa(1_D). \tag{10}$$

Précisons ce que nous entendons par $\kappa \in \hat{I}_a^\Gamma \cap [\kappa]$. Il existe un plongement du tore dual $\hat{I}_a$ du centralisateur I_a dans $\hat{G}$ bien défini à $\hat{G}$-conjugaison près. Le sous-ensemble de $\hat{I}_a^\Gamma$ des éléments dont l'image dans $\hat{G}$ appartient à la classe de conjugaison $[\kappa]$ est donc bien défini. Cette formule ci-dessus suggère l'existence d'une $[\kappa]$-décomposition de la restriction de $m_*\mathbb{Q}_\ell$ à l'ouvert $\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$.

Nous allons maintenant analyser la condition nécessaire pour que l'intersection $\hat{I}_a \cap [\kappa]$ soit non vide. Pour simplifier, supposons que G est un groupe semi-simple adjoint déployé. La monodromie du tore I_a est donnée par un homomorphisme $\Gamma \to W$ d'image un sous-groupe Σ_a de W bien défini à W-conjugaison près. Soit κ un représentant de $[\kappa]$ appartenant au tore maximal $\hat{T}$ de $\hat{G}$. Soit W_κ le sous-groupe de W des éléments qui fixent κ. Pour que $\hat{I}_a \cap [\kappa]$ soit non vide, il est nécessaire que Σ_a soit conjugué à un sous-groupe de W_κ. Si on suppose en plus que Σ_a est conjugué à $[W_\kappa]$, alors le cardinal de l'intersection $\hat{I}_a \cap [\kappa]$ est égal à $|\mathrm{Nor}(W_\kappa)|/|W_\kappa|$.

4. Symétries de la fibration de Hitchin

Dans le cas $G = \mathrm{GL}(n)$, pour tout $a = (a_i) \in \mathcal{A}(\bar{k})$, on a une courbe spectrale Y_a définie comme la courbe d'équation

$$t^n - a_1 t^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n = 0$$

tracée sur l'espace total du fibré en droites $\mathcal{O}_X(D)$. Si $a \in \mathcal{A}^{\heartsuit}(\bar{k})$, la courbe spectrale Y_a est réduite et la fibre $\mathcal{M}_a$ est la jacobienne compactifiée de Y_a classifiant les $\mathcal{O}_{Y_a}$-modules sans torsion de rang générique 1. Le groupe de symétries naturelles de Y_a est dans ce cas la jacobienne de Y_a classifiant les $\mathcal{O}_{Y_a}$-modules inversibles.

La construction de ces symétries dans le cas général repose sur une propriété simple des centralisateurs. Soit I le $\mathfrak{g}$-schéma en groupes des centralisateurs

$$I_x = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}.$$

Soit $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ l'ouvert de $\mathfrak{g}$ des éléments réguliers de $\mathfrak{g}$. Soit $\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{t}/W$ le morphisme caractéristique de Chevalley *cf.* (1). Rappelons qu'on a une action naturelle de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathfrak{t}/W$ qui fait de χ un morphisme $\mathbb{G}_m$-équivariant. On renvoie à [21, 3.2] pour la démonstration du lemme suivant.

Lemme 4.1. *Il existe un unique schéma en groupes affine lisse $\mathbb{G}_m$-équivariant J sur $\mathfrak{t}/W$ muni d'un homomorphisme G-équivariant $\chi^* J \to I$ dont la restriction à $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ est un isomorphisme.*

Un point $a \in \mathcal{A}^{\heartsuit}(\bar{k})$ définit un morphisme $a\colon X \to [(\mathfrak{t}/W)/\mathbb{G}_m]$. L'image inverse $J_a = a^*[J/\mathbb{G}_m]$ est un schéma en groupes lisse sur X qui sur un ouvert dense U_a est un tore. Considérons le champ P_a des J_a-torseurs. On a une action de P_a sur $\mathcal{M}_a$ qui résulte de l'homomorphisme $\chi^* J \to I$. De plus, lorsque a varie dans $\mathcal{A}^{\heartsuit}$, les P_a s'organisent en un champ de Picard relatif lisse [21]. Cette construction a été inspirée par la lecture de [6]. Le champ de Picard P_a a été considéré aussi dans [5].

D'après un théorème de Grothendieck [8, 15.6.4], il existe un ouvert de Zariski P^0 de P telle que la fibre P_a^0 est la composante neutre de P_a, car P est lisse sur $\mathcal{A}^{\heartsuit}$. En prenant le faisceau quotient P/P^0, on obtient un faisceau en groupes abéliens $\pi_0(P)$ pour la topologie étale de $\mathcal{A}^{\heartsuit}$ tel que pour tout $a \in \mathcal{A}^{\heartsuit}(\bar{k})$, la fibre $\pi_0(P)_a$ est le groupe des composantes connexes $\pi_0(P_a)$. On a une description très précise de ce faisceau dans le cas où G est un groupe semi-simple adjoint.

Soit $X \times \mathcal{A}^{\heartsuit} \to [(\mathfrak{t}/W)/\mathbb{G}_m]$ le morphisme tautologique. Soit U l'image inverse de l'ouvert régulier semi-simple de $\mathfrak{t}/W$. Soit $\widetilde{U}$ le revêtement fini étale galoisien de groupe de Galois W défini comme l'image inverse du revêtement $\mathfrak{t} \to \mathfrak{t}/W$. Puisqu'on n'est dans $\mathcal{A}^{\heartsuit}$, le morphisme $\widetilde{U} \to \mathcal{A}^{\heartsuit}$ est un morphisme lisse à fibres non vides. D'après [8, 15.6.4] et [21, 6.2], il existe un faisceau $\pi_0(\widetilde{U})$ pour la topologie étale de $\mathcal{A}^{\heartsuit}$ tel que pour tout $a \in \mathcal{A}^{\heartsuit}(\bar{k})$, la fibre de $\pi_0(\widetilde{U})$ est l'ensemble des composantes connexes de $\widetilde{U}_a$. Notons que W agit sur $\pi_0(\widetilde{U})$ et que cette action est transitive fibre par fibre.

Proposition 4.2. *Il existe un homomorphisme surjectif canonique*

$$\mathbb{X}^\vee \times^W \pi_0(\widetilde{U}) \to \pi_0(P) \tag{11}$$

qui est un isomorphisme si G est un groupe semi-simple adjoint. Ici $\mathbb{X}^\vee$ est le groupe des cocaractères du tore T muni de l'action de W et le signe $\times^W$ désigne un produit contracté par l'action diagonale de W.

Pour tout $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$, en vertu du lemme d'homotopie, le groupe P_a agit sur $\mathrm{H}^i(\mathcal{M}_a, \mathbb{Q}_\ell)$ à travers le groupe des composantes connexes $\pi_0(P_a)$. Sur l'ouvert anisotropique $\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$, les groupes $\pi_0(P_a)$ sont finis. On peut donc décomposer

$$\mathrm{H}^i(\mathcal{M}_a, \mathbb{Q}_\ell) = \bigoplus_\kappa \mathrm{H}^i(\mathcal{M}_a, \mathbb{Q}_\ell)_\kappa \tag{12}$$

où κ parcourt l'ensemble des caractères du groupe $\pi_0(P_a)$. Ce groupe est un quotient de $\mathbb{X}^\vee_\Gamma$ si bien que ses caractères sont des éléments de $\hat{T}^\Gamma$. Cette décomposition correspond via le dictionnaire faisceaux-fonctions à la formule (8). En effet, d'après [21, 4.6] le champ quotient $[\mathcal{M}_a/P_a]$, est un produit des champs définis localement de la même façon qu'une intégrale orbitale globale divisée par un nombre de Tamagawa du centralisateur est égal au produit des intégrales orbitales locales.

Globalement sur $\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$, le groupe P agit sur les faisceaux de cohomologie perverse ${}^p\mathrm{H}^i(m_*^{\mathrm{ani}}\mathbb{Q}_\ell)$ et cette action se factorise à travers le faisceau $\pi_0(P)$ en vertu d'une variante du lemme d'homotopie [20, 3.2.3]. Pour chaque ouvert étale U de $\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$, soit $\pi_0(P)(U)^*$ le groupe des caractères de $\pi_0(P)(U)$ et soit $\pi_0(P)^{\mathrm{co}}$ le cofaisceau associé à ce précofaisceau $U \mapsto \pi_0(P)^{\mathrm{co}}$. On envoie à [21, §8] pour un petit résumé de la notion de cofaisceau. On en déduit une décomposition de ${}^p\mathrm{H}^i(m_*^{\mathrm{ani}}\mathbb{Q}_\ell)$ selon l'ensemble des sections globales du cofaisceau $\pi_0(P)^{\mathrm{co}}$. La description (11) du faisceau $\pi_0(P)$ permet de définir une application canonique de l'ensemble des sections globales $\Gamma(\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}, \pi_0(P)^{\mathrm{co}})$ dans l'ensembles des classes de $\hat{G}$-conjugaison $[\kappa]$ des éléments κ d'ordre fini de $\hat{G}$, voir [21, 8.4]. On en déduit une décomposition

$${}^p\mathrm{H}^i(m_*^{\mathrm{ani}}\mathbb{Q}_\ell) = \bigoplus_{[\kappa]} {}^p\mathrm{H}^i(m_*^{\mathrm{ani}}\mathbb{Q}_\ell)_{[\kappa]} \tag{13}$$

qui correspond à (10) au niveau des fonctions.

Pour simplifier les notations, considérons le faisceau pervers gradué

$$(m_{*,\mathrm{gr}}^{\mathrm{ani}}\mathbb{Q}_\ell)_{[\kappa]} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} {}^p\mathrm{H}^i(m_*^{\mathrm{ani}}\mathbb{Q}_\ell)_{[\kappa]}.$$

On peut estimer le support de $(m_{*,\mathrm{gr}}^{\mathrm{ani}}\mathbb{Q}_\ell)_{[\kappa]}$. Pour simplifier, supposons de nouveau G semi-simple adjoint et déployé. On peut stratifier $\mathcal{A}$ de la façon suivante

$$\mathcal{A} = \bigsqcup_{[\Sigma]} \mathcal{A}_{[\Sigma]}$$

où $[\Sigma]$ parcourt l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes Σ de W. Un point géométrique $a \in \mathcal{A}(\bar{k})$ appartient à la strate $[\Sigma]$ si le groupe de monodromie du tore I_a est $[\Sigma]$. Une autre strate $\mathcal{A}_{[\Sigma']}$ est incluse dans l'adhérence de $\mathcal{A}_{[\Sigma]}$ si Σ' est conjuguée à un sous-groupe de Σ.

Proposition 4.3. *Le morceau ${}^p\mathrm{H}^i(m_*^{\mathrm{ani}}\mathbb{Q}_\ell)_{[\kappa]}$ est supporté par $\mathcal{A}_{[W_\kappa]}$ où W_κ est le fixateur dans W d'un représentant $\kappa \in \hat{T}$ de $[\kappa]$.*

La cohomologie perverse de la fibration de Hitchin se décompose donc en morceaux de différents supports. On appelle stables les morceaux correspondant aux $\kappa \in Z_{\hat{G}}$. Son support est a priori tout l'espace $\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$. Il y a lieu de penser que ces morceaux stables ne contiennent pas de facteurs directs de support strictement plus petit. Ceci est probablement une conjecture difficile.

5. Groupes endoscopiques

Pour simplifier l'exposition, supposons que G est un groupe semi-simple adjoint déployé. Le groupe dual $\hat{G}$ est alors un groupe semi-simple simplement connexe muni de l'action triviale de Γ. Soit $\kappa \in \hat{G}$ un élément d'ordre fini. Le centralisateur $\hat{G}_\kappa$ est alors un groupe réductif connexe qu'on notera $\hat{H}$. Soit H le groupe déployé sur k dont le dual est $\hat{H}$. Il n'y a qu'une faible relation entre H et G : ils partagent un tore maximal T et le groupe de Weyl W_H de H est un sous-groupe de réflexions du groupe de Weyl W de G. Avec l'hypothèse G adjoint, W_H est le fixateur W_κ de κ dans W.

Considérons l'espace de module des Hitchin pour le triplet (X, D, H) qui paramètre les couples (E_H, ϕ) où E_H est un H-torseurs sur X et où ϕ est une section globale de $\mathrm{ad}(E_H)(D)$. On a aussi une fibration de Hitchin

$$n\colon \mathcal{N} \to \mathcal{B}$$

où $\mathcal{B}$ est l'espace des sections globales du fibré $(\mathfrak{t}/W_H) \times^{\mathbb{G}_m} L_D$. Le morphisme évident $\mathfrak{t}/W_H \to \mathfrak{t}/W$ induit un morphisme $\pi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Par restriction à $\mathcal{B}^\heartsuit$, on obtient un morphisme non ramifié $\pi^\heartsuit\colon \mathcal{B}^\heartsuit \to \mathcal{A}^\heartsuit$ d'image $\bar{\mathcal{A}}_{W_H}$. Au-dessus de l'ouvert $\mathcal{A}_{W_H}$ de $\bar{\mathcal{A}}_{W_H}$, le morphisme

$$\pi_{W_H} : \mathcal{B}_{W_H} \to \mathcal{A}_{W_H}$$

est un morphisme fini et étale de degré $|\mathrm{Nor}(W_H)|/|W_H|$ égal au cardinal de l'ensemble $\hat{I}_a^\Gamma \cap [\kappa]$ pour tout point géométrique $a \in \mathcal{A}_{W_H}(\bar{k})$.

Sur $\mathcal{B}^\heartsuit$, on a un champ de Picard Q des symétries de la fibration de Hitchin $n\colon \mathcal{N} \to \mathcal{B}$. L'action qui s'en déduit sur $n_*^\heartsuit\mathbb{Q}_\ell$ se factorise à travers le faisceau $\pi_0(Q)$. Sur la strate ouverte $\mathcal{N}_{\Sigma_H}$ de $\mathcal{N}$, le faisceau $\pi_0(Q)$ est le faisceau constant de valeur $Z_{\hat{H}}$.

Dans la décomposition $n_*^{\mathrm{ani}}\mathbb{Q}_\ell$, on a donc un morceau stable $(n_*^{\mathrm{ani}}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa$ correspondant à l'élément $\kappa \in [\kappa]$ qui a servi à définir $\hat{H}$. De même, on a un κ-morceau

$(\pi_{W_H}^* m_*^{\mathrm{ani}} \mathbb{Q}_\ell)_\kappa$. D'après la proposition 4.3, on sait que ces deux morceaux sont sommes directes de faisceaux pervers purs. Suivant Langlands et Shelstad [16], il serait tentant de formuler la conjecture suivante.

Conjecture 5.1. Il existe
- un nombre entier naturel d
- un système local $\mathcal{L}$ de rang 1 et d'ordre 2 sur $\mathcal{B}_{\Sigma_H}$
- un $Z_{\hat{H}}$-torseur Υ sur $\mathcal{B}_{\Sigma_H}$

tels qu'il existe un isomorphisme de faisceaux pervers gradués au-dessus de $\mathcal{B}_{W_H}$

$$((n_*^{\mathrm{ani}} \mathbb{Q}_\ell)_\kappa^\Upsilon \otimes \mathcal{L}[-2d](-d)) \to (\pi_{W_H}^* m_*^{\mathrm{ani}} \mathbb{Q}_\ell)_\kappa$$

où l'exposant Υ consiste à tordre l'objet muni d'une action de $Z_{\hat{H}}$ par le $Z_{\hat{H}}$-torseur Υ, où $[-2d]$ est le décalage dans la graduation et où $(-d)$ est le twist à la Tate.

Par adjonction, on déduit de cette conjecture un isomorphisme de faisceaux pervers gradués sur $\mathcal{A}_{W_H}$

$$(\pi_{W_H})_* ((n_*^{\mathrm{ani}} \mathbb{Q}_\ell)_\kappa^\Upsilon \otimes \mathcal{L}[-2d](-d)) \to (m_*^{\mathrm{ani}} \mathbb{Q}_\ell)_{[\kappa]}.$$

Il est très tentant de penser que cet isomorphisme s'étend à $\bar{\mathcal{A}}_{W_H}$ car en mettant ensemble ces isomorphismes pour les différents groupes endoscopiques, on obtiendrait géométriquement la stabilisation complète de la partie anisotrope de la formule des traces. Pour le moment, il manque un peu d'exemples pour que cette conjecture plus générale soit complètement convaincante.

Soit $b \in \mathcal{B}_{W_H}(\mathbb{F}_q)$ un $\mathbb{F}_q$-point de $\mathcal{B}_{W_H}$ d'image $a \in \mathcal{A}_{W_H}(\mathbb{F}_q)$. La conjecture 5.1 implique l'égalité suivante qui est une forme globale du lemme fondamental

$$O_a^\kappa(1_D) = q^d \epsilon_b(\mathcal{L}) \epsilon_b(\kappa, \Upsilon) O_{H,b}^\kappa(1_D).$$

Ici $\epsilon_b(\mathcal{L}) \in \{\pm 1\}$ est le signe défini par la fibre en b du système local $\mathcal{L}$ de rang 1 d'ordre 2 et $\epsilon_b(\kappa, \Upsilon)$ est la racine d'unité définie par la fibre en b du système local de rang 1 obtenu en poussant le $Z_{\hat{H}}$-torseur Υ par le caractère κ. Les intégrales $O_a^\kappa(1_D)$ et $O_{H,b}^\kappa(1_D)$ sont des produits de κ-intégrales orbitales locales. La κ-intégrale orbitale pour H est une intégrale orbitale stable car $\kappa \in Z_{\hat{H}}$. Il est très probable qu'on peut déduire la forme usuelle locale du lemme fondamental, conjecturée par Langlands et Shelstad [16], à partir de cette forme globale. En particulier, le nombre $q^d \epsilon_b(\mathcal{L}) \epsilon_b(\kappa, \Upsilon)$ doit être le produit en toutes les places de facteurs de transfert de Langlands–Shelstad.

Pour formuler la conjecture 5.1 de façon plus précise, il est nécessaire de construire les différents ingrédients d, $\mathcal{L}$ et Υ. Dans le cas du groupe unitaire, d et $\mathcal{L}$ ont été construits dans [20], et Υ est trivial. Les constructions de d et $\mathcal{L}$ se généralisent sans trop de difficultés au cas général. Il existe aussi en général un candidat naturel pour Υ dont la construction reste toutefois conditionnelle.

Dans le cas des groupes unitaires, la conjecture a été démontrée dans [20]. Le cas général reste ouvert.

Remerciements. J'exprime ma reconnaissance à J.-F. Dat, V. Drinfeld, A. Genestier, R. Kottwitz, J.-P. Labesse, L. Lafforgue, R. Langlands, C. Moeglin, M. Rapoport et tout particulièrement à G. Laumon pour l'encouragement et l'aide qu'ils m'ont apportés lors de différents stades de ce projet. Je remercie G. Laumon et Ngô Dac Tuân pour leur relecture attentive de ce rapport.

Références

[1] Arthur, J., Toward a stable trace formula. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Berlin, 1998), Vol. II, Doc. Math., J. DMV, Extra Vol. ICM Berlin, 1998, 507–517.

[2] Biswas, I., Ramanan, S., Infinitesimal study of Hitchin pairs. *J. London Math. Soc.* **49** (1994), 219–231.

[3] Cluckers, R., Loeser, F., Constructible exponential functions, motivic Fourier transform and transfer principle. Prépublication.

[4] Dat, J.-F., Lemme fondamental et endoscopie, une approche géométrique. *Séminaire Bourbaki* n° **940**, novembre 2004.

[5] Donagi, R., Gaitsgory, D., The gerbs of Higgs bundles. *Transform. Groups* **7** (2002), 109–153.

[6] Faltings, G., Stable G-bundles and projective connections. *J. Alg. Geom.* **2** (1993), 507–568.

[7] Goresky, M., Kottwitz, R., MacPherson, R., Homology of affine Springer fiber in the unramified case. *Duke Math. J.* **121** (2004), 509–561.

[8] Grothendieck, A., Dieudonné J., Éléments de géométrie algébrique IV.3. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **28** (1966), 5–255.

[9] Hales, T., The fundamental lemma for Sp(4). *Proc. Amer. Math. Soc.* **125** (1) (1997), 301–308.

[10] Hitchin, N., Stable bundles and integrable connections. *Duke Math. J.* **54** (1987), 91–114.

[11] Kottwitz, R., Harmonic Analysis on semi-simple p-adic Lie algebras. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Berlin, 1998), Vol. II, Doc. Math., J. DMV, Extra Vol. ICM Berlin, 1998, 553–562.

[12] Kottwitz, R., Stable trace formula : elliptic singular terms. *Math. Ann.* **275** (1986), 365–399.

[13] Jacquet, H., and Langlands, R., *Automorphic forms on* GL(2). Lecture Notes in Math. 114, Springer-Verlag, Berlin, New York 1970.

[14] Labesse, J.-P., and Langlands, R., L-indistinguishability for SL(2). *Canad. J. Math.* **31** (1979), 726–785.

[15] Langlands, R., *Les débuts d'une formule des traces stables*. Publications de l'Université Paris VII, vol. 13, 1983.

[16] Langlands, R., and Shelstad, D., On the definition of transfer factors. *Math. Ann.* **278** (1987), 219–271.

[17] Laumon, G., Fibres de Springer et jacobiennes compactifiées. Prépublication ; arXiv math.AG/0204109.

[18] Laumon, G., Sur le lemme fondamental pour les groupes unitaires. Prépublication ; arXiv math.AG/0212245.

[19] Laumon, G., et Moret-Bailly, L., *Champs algébriques*. Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) 39, Springer-Verlag, Berlin 2000.

[20] Laumon, G., et Ngô, B.-C., Le lemme fondamental pour les groupes unitaires. Prépublication ; arXiv math.AG/0404454.

[21] Ngô, B.-C., Fibration de Hitchin et endoscopie. *Invent. Math.*, à paraître.

[22] Ono, T., On Tamagawa numbers. In *Algebraic groups and discontinuous subgroups* (Boulder, Colo., 1965), Proc. Sympos. Pure Math. 9, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1966, 122–132.

[23] Rogawski, J., *Automorphic representations of unitary groups in three variables.* Ann. of Math. Stud. 123, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.

[24] Waldspurger, J.-L., Sur les intégrales orbitales tordues pour les groupes linéaires : un lemme fondamental. *Canad. J. Math.* **43** (1991), 852–896.

[25] Waldspurger, J.-L., Comparaison d'intégrales orbitales pour des groupes p-adiques. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Zürich, 1994), Vol. 2, Birkhäuser, Basel 1995, 807–816.

[26] Waldspurger, J.-L., Le lemme fondamental implique le transfert. *Compositio Math.* **105** (1997), 153–236.

[27] Waldspurger, J.-L., Endoscopie et changement de caractéristique. Prépublication.

[28] Weissauer, R., A special case of fundamental lemma. Prépublication.

Département de mathématiques, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay, France
E-mail: Bao-Chau.Ngo@math.u-psud.fr